

Traccia di correzione della Competizione
« MATEMATICA SENZA FRONTIERE » 2000

Esercizio 1 :

La scacchiera conta normalmente 64 pedine (= 8×8) di cui 32 nere e 32 bianche. Tolte due pedine nere, ne restano 30 nere e 32 bianche. Un domino ricopre esattamente due tessere adiacenti di cui una nera e una bianca. Di conseguenza 30 domino possono ricoprire 30 tessere nere e 30 tessere bianche. Le due tessere che restano scoperte sono dunque dello stesso colore : sono bianche.

Esercizio 2 :

Si cita una delle possibili soluzioni : si considerano due prezzi 3 876 lire e 11 617 lire ; se li consideriamo convertiti in euro corrispondono rispettivamente a circa 2,0 euro e a 5,9 euro. La somma dei prezzi convertiti è pertanto 7,9 euro. Invece, la somma in lire di 15 493 lire convertita è pari a 8,0 euro.

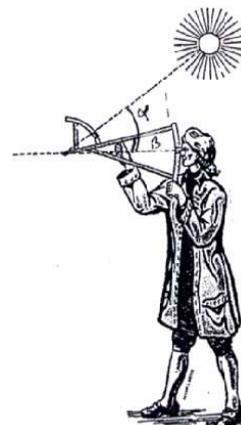
I due metodi possono dunque portare a dei risultati differenti. (Il metodo che si applica nella pratica è quello che consiste nel fare la somma dei prezzi preventivamente convertiti.)

Esercizio 3 :

Dapprima l'osservatore posizionava la fenditura dell'arco superiore su un certo valore α ; in seguito, modificava l'inclinazione dello strumento in modo che i raggi del Sole arrivassero in A; simultaneamente puntava l'orizzonte attraverso la fenditura dell'arco inferiore e rilevava la misura β .

L'altezza del sole sopra l'orizzonte è ottenuta sommando gli angoli α e β .

Nota : Infatti, l'arco della circonferenza superiore poteva essere graduato con intervalli da 5 a 10 gradi. L'arco inferiore poteva essere ingrandito in relazione all'aumento del suo raggio ; ciò produceva l'aumento del numero di graduazioni con il conseguente miglioramento della precisione della misura.



Esercizio 5 :

cifra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Numero di pixel illuminati	10	14	14	14	17	15	11	17	15	19

Per ogni cifra, il numero è compreso tra 10 e 19.

Per un intero a due cifre, il numero di pixel illuminati è dunque compreso tra 20 e 38; fra questi interi l'unica soluzione è

29 ($29 = 14 + 15$).

Numero	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Numero di pixel illuminati	33	24	28	28	28	31	29	25	31	29	33	24	28	28	28	31	29	25	31

Un intero avente n cifre si rappresenta con al massimo $19n$ pixel e questo numero è superiore o uguale a 10^{n-1} ; o per ogni intero $n \geq 3$, $19n < 10^{n-1}$. **29 è dunque l'unica soluzione.**

Nota : I numeri della forma "ab" e "ba" sono rappresentati con lo stesso numero di pixel. Si può dunque tralasciare 21 e 31 che corrispondono a 12 e 13 già eliminati. Così come 32 dopo aver eliminato 23.

Esercizio 6 :

Un metodo possibile consiste nel creare la lista dei numeri dei soldati disposti nella quinta colonna per ognuna delle due disposizioni. Nel caso in cui i numeri partano da 5 e procedano di 30 in 30 risulta :

5 - 35 - 65 - 95 - 125 - 155 - 185 - 215 - 245 - 275 - 305 - 335 - 365 - 395 - 425 - 455 - 485 - 515 - 545 - 575 - 605 - 635 - 665 - 695 - 725 - 755 - 785 - 815 - 845 - 875 - 905 - 935 - 965.

Nel caso in cui i numeri partano da 5 e procedano di 33 in 33 risulta:

5 - 38 - 71 - 104 - 137 - 170 - 203 - 236 - 269 - 302 - 335 - 368 - 401 - 434 - 467 - 500 - 533 - 566 - 599 - 632 - 665 - 698 - 731 - 764 - 797 - 830 - 863 - 896 - 929 - 962.

Si constata allora che **Hocus e Pocus hanno i numeri 335 e 665** (numeri comuni a due posizioni; 5 si deve escludere perché nessuno dei due si trova in prima linea).

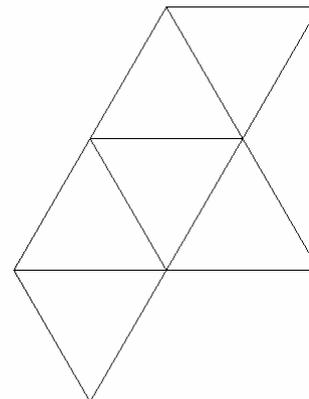
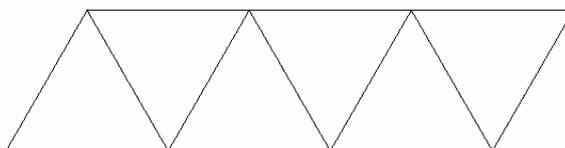
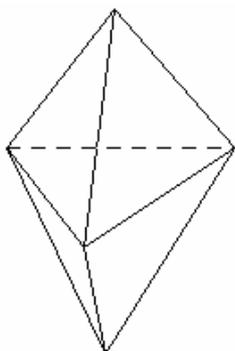
Note.:

- Per congruenza, si perviene alla soluzione più velocemente: i numeri usati da Arithmēticus sono del tipo $5 + 30k$ e quelli usati da Calculus sono del tipo $5 + 33k'$ da cui $5 + 30k = 5 + 33k'$, per semplificazione si ha $10k = 11k'$. Con $k = 11$, $k' = 10$ e si ottiene $5 + 30 \times 11 = 335$. Con $k = 22$, $k' = 20$ e si ottiene $5 + 30 \times 22 = 665$.
- Si può proporre agli studenti bravi una variante di questo esercizi: Hocus, Pocus e Abracadabrus sono nella prima colonna al comando di Arithmēticus e nella settima al comando di Calculus.

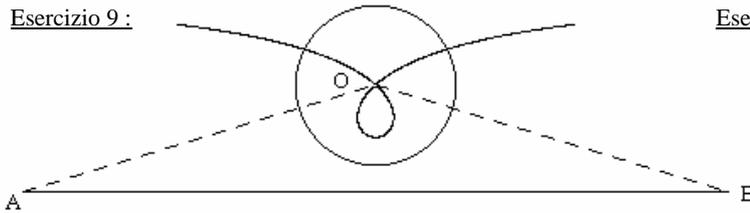
Esercizio 8 :

Il poliedro di Piero è un **esaedro non regolare**.

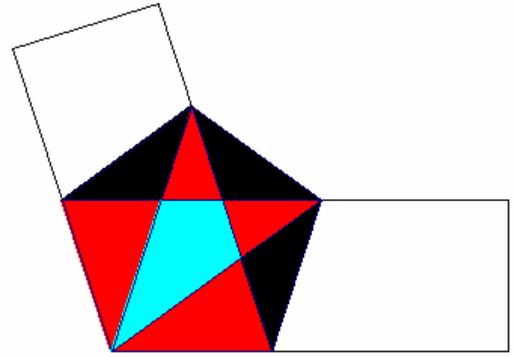
Ecco due sviluppi possibili:



Esercizio 9 :



Esercizio 4 :



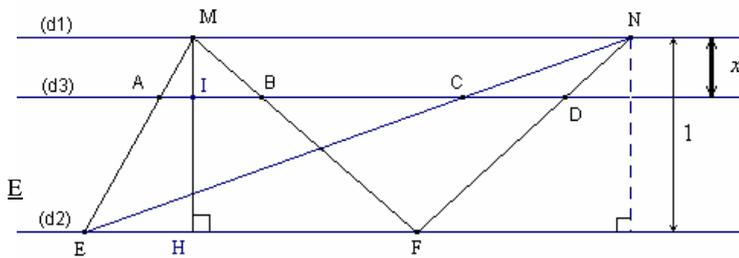
Esercizio 10 :

Applicando successivamente nel triangolo MEF e poi in quello MEH

il teorema di Talete, si ottiene : $\frac{AB}{EF} = \frac{MA}{ME} = \frac{MI}{MH} = x = x$.

Considerando l'altezza tracciata da N nel triangolo NEF, si ha :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{ND}{NF} = \frac{x}{1} = x. \text{ De } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF} = x, \text{ si deduce } \mathbf{AB = CD}.$$



Esercizio 11 :

I 23 secondi sono la misura della durata dell'attraversamento della stazione da parte del treno (dall'inizio della locomotiva alla fine dell'ultimo vagone) e anche la misura del tempo impiegato dal treno (dal primo all'ultimo vagone) a percorrere tutto il marciapiede.

Si devono togliere i 6 secondi che corrispondono al tempo di passaggio del treno. Si ha allora 17 secondi per l'attraversamento della stazione che corrisponde al percorso di 340 metri. La velocità del treno è dunque

$$v = \frac{340 \text{ m}}{17 \text{ s}} = 20 \text{ m/s} = \mathbf{72 \text{ km/h}}$$

La lunghezza del treno è $d' = 20 \times 6 = \mathbf{120 \text{ m}}$.

Esercizio 12 :

Chiamiamo r il raggio e h la altezza del mucchio di sabbia di forma conica.

$$\text{Volume di sabbia scavata : } 15 \times (\pi \times (2r)^2 - \pi \times r^2) = 15\pi (4r^2 - r^2) = 15\pi \times 3r^2 = 45\pi r^2.$$

$$\text{Volume del cono : } \frac{\pi r^2 h}{3}. \text{ Questi volumi sono } 45\pi r^2 = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Quindi $45 = \frac{h}{3}$ e anche $h = 135$ cm. Alberto misura $135 + 15 = 150$ cm

Nota : L'altezza del mucchio di sabbia è indipendente dal raggio. Infatti, se il cerchio esterno avesse un raggio diverso dal doppio del cerchio interno, l'altezza dipenderebbe unicamente dal rapporto dei raggi

Esercizio 13 :

$$AB = e : AC = R - e - (r - e) = R - r. \text{ Per il teorema di Talete } \frac{EB}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{EB}{H} = \frac{e}{R-r} ; EB = \frac{0,5 \times 18}{9-5} = 2,25 \text{ cm. } 18 + 9 \times 2,25 = \mathbf{38,25 \text{ cm.}}$$

