

MATEMATICA SENZA FRONTIERE

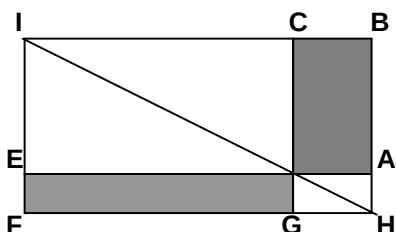
elementi di soluzione – competizione 1998/99

Esercizio n°1

Fac-simile

Costruzione

Sia DE il prolungamento di AD e quindi perpendicolare a CD. Sia I il quarto vertice del rettangolo di base DE e altezza DC. Sia H il punto di intersezione tra le rette DI e AB. La perpendicolare da H ad AB interseca il prolungamento di CD in G e quello di EI in F. Il quadrilatero EFDG risulta quindi essere un rettangolo ed è equivalente ad ABCD perché differenza tra i triangoli IBH = HIF, DCI = IDE, HAD = GHD.



Esercizio n°2

Tutto all'inverso

La regola enunciata vale per tutte le frazioni unitarie, sia pari che dispari, infatti

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2d} + \frac{1}{6d}$$

Ma per le frazioni unitarie pari diventa

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3n}$$

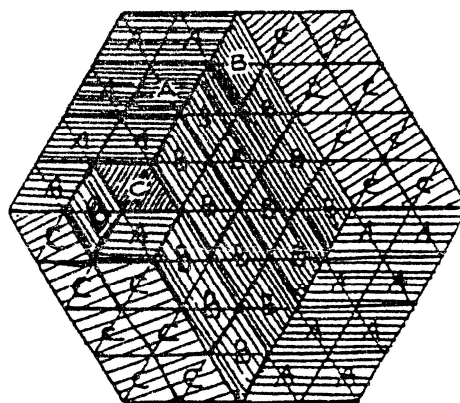
Esercizio n°3

Con una dimensione in più

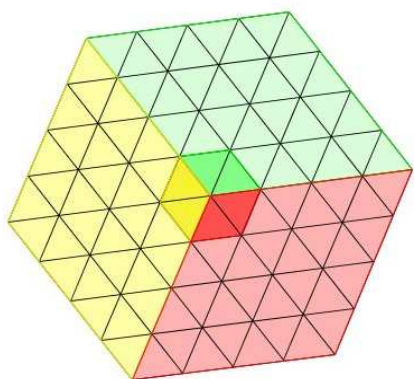
Infatti, effettuata una colorazione secondo la regola indicata, si ottengono 16 rombi per ciascun colore.

Osservando la figura pluricolorata si colgono immagini tridimensionali che suggeriscono la permanenza dello stesso numero di cubetti da considerare nei modi seguenti:

- raggruppabili per sezioni parallele di un cubo grande,
- articolati in pieni e vuoti,
- nel caso più generale, ricomponibili immaginando di collegare terne di facce, anche isolate, ma orientate secondo i tre assi perpendicolari.



Un esempio di soluzione



Un'altra possibile soluzione

Esercizio n°4

Per un gettone in meno

La somma S delle cifre di tutti i gettoni è $1+2+\dots+9=45$. Dopo aver tolto il gettone deve rimanere una somma divisibile sia per 3 che per 4, quindi divisibile per 12. L'unico multiplo di 12 possibile è 36, quindi il gettone da togliere è quello contrassegnato col 9.

Esercizio n°5

Ritrovate il riferimento

Tracciate le circonferenze di centro A e di centro B rispettivamente di raggi 3 e 7, la tangente comune è l'asse delle y. Tracciate le circonferenze di centro A e di centro B rispettivamente di raggi 2 e 5, la tangente comune è l'asse delle x.

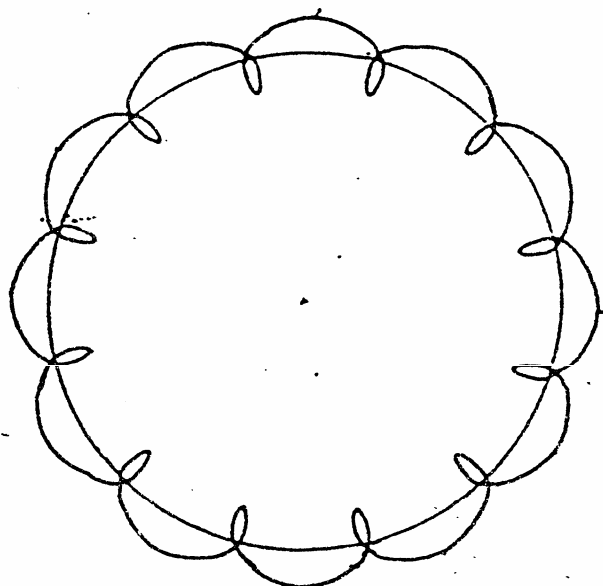
Esercizio N°6

Codice mistero

Il messaggio decifrato è : DECIMO ANNIVERSARIO

Esercizio N°7

Tutto è relativo



Esercizio N°8

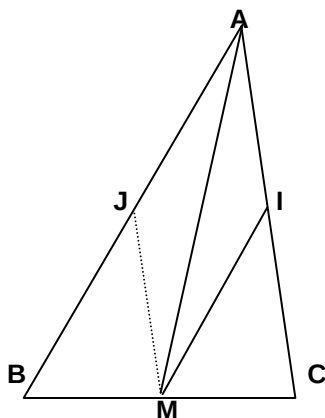
Retrospettiva

Tra la data richiesta e l'11 marzo 1999 sono passati $34.768 - 31.478 = 3.290$ giorni. Tra l'11 marzo 1990 e l'11 marzo 1999 cadono due anni bisestili, quindi tra essi sono passati $9 \times 365 + 2 = 3.287$ giorni. Se ne deduce facilmente che la prima prova di Matematica senza Frontiere si è svolta in Francia l'8 marzo 1990 e, siccome 3.290 è multiplo di 7, anche allora era un giovedì.

Esercizio N°9

Taglia e cuci

Sia M il punto medio di BC, J il punto medio di AB e I il punto medio di AC. Si deve tagliare ABM lungo la mediana MJ. Infatti, per un noto teorema, MJ è parallelo a CA e $MJ = \frac{1}{2} AC = CI = AI$. Analogamente MI è parallelo ad AB e $MI = \frac{1}{2} AB = BJ = AJ$. Ne segue che i triangoli AMJ e AMI sono uguali, e lo stesso per BJM e MIC.

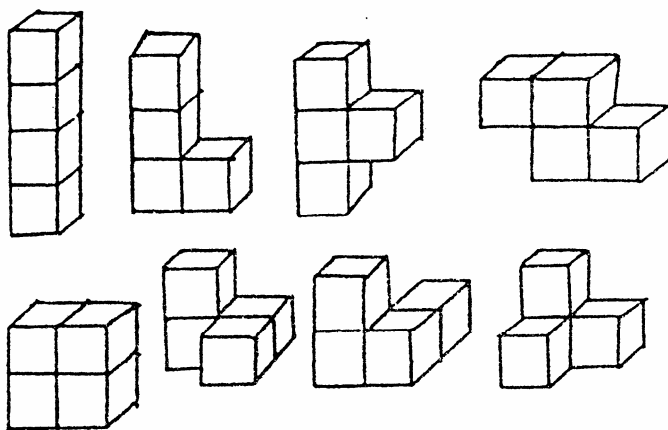


Esercizio N°10

Quadricubi

Ci sono 8 quadricubi.

Osservazione: il sesto e settimo caso non sono sovrapponibili comunque vengano ruotati.

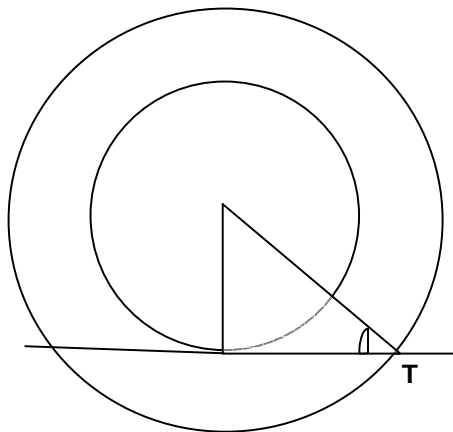


Esercizio N°11
Grandangolare

L'angolo $\alpha = \widehat{STV}$ ha valore massimo quando SV è perpendicolare a VT, cioè quando TV è tangente alla traiettoria di V.

Il raggio dell'orbita di Venere è $SV = ST \sin \alpha$ ($\alpha = 46^\circ$), quindi SV è circa uguale a 107.900.970 Km.

N.B. Sulla figura richiesta SV misura circa 3,6 cm.

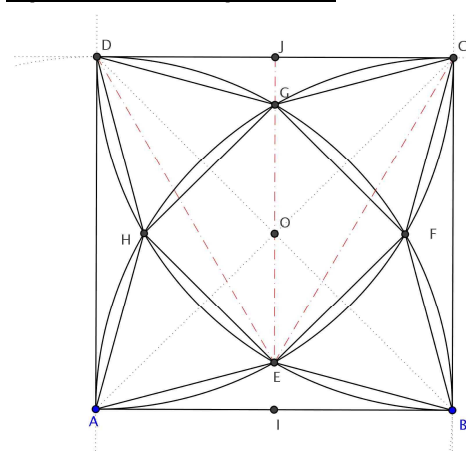


Esercizio N°12
Sulla rete

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sulla ennesima "verticale" figurano gli interi compresi tra S_n e S_{n+1} . Risolvendo l'equazione $S_n = 1.999$ si trova un numero compreso tra 62 e 63. Sulla "verticale" corrispondente a 62 figurano i numeri compresi fra 1.953 e 2.015. Poiché $1.999 - 1.953$ è uguale a 46 e $2.015 - 1.999 = 16$ le coordinate richieste sono 46 e 16.

Esercizio N°13
Il problema della piramide



I punti E, G, H, F appartengono alle mediane del quadrato (per la simmetria della figura). Sia O il centro del quadrato e siano I, J i punti medi di AB e CD. Il triangolo CDE è equilatero di lato 10 cm, quindi $EJ = 5 \cdot \sqrt{3}$ cm e $EI = 10 - 5\sqrt{3}$ cm, quindi per il teorema di Pitagora $AE = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm = AH. $OE = OI - IE = (5\sqrt{3} - 5)$ cm. Per il teorema di Pitagora $EH^2 = EO^2 + OH^2$, quindi $EH^2 = 2(5\sqrt{3} - 5)^2$ cm² = AE^2 .

Quindi $EH = AE = \sqrt{2}(5\sqrt{3} - 5)$ cm. Lo stesso per i triangoli DHG, CGF e EBF: la piramide esiste perché AE è maggiore di OE. E' regolare e il suo vertice S si proietta in O. La sua altezza per il teorema di Pitagora è uguale a $5\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ cm, cioè a circa 3,66 cm.

Altra soluzione

Si possono costruire gli archi di circonferenza esternamente al quadrato.

Si formano allora due ottagoni:

GEIBKAMO e JELBAHO

Si verifica facilmente che il primo non può essere lo sviluppo di una piramide, il secondo invece sì.

