Mathématiques SANS Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 10 marzo 2022

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) **Pensa e indovina**

E' un esercizio di logica, risolvibile in modo semplice con il ricorso a una tabella del tipo:

mano D	mano S	2 mano D	3 mano S	somma
p	d	p	d	d
d	**p**	p	p	p

dove p = pari, d = dispari

Si deduce, quindi, che Emma in base alla somma individua la mano contenente le pedine in numero pari: se la somma è pari, la mano ricercata è la sinistra, se è dispari, la mano ricercata è la destra.

Esercizio n. 2 (5 punti) **Proprio un quadrato**

Si considera che:

- *a*, *b*, *c*, *d* sono cifre comprese tra 0 e 9, con *a* non nullo;
- *a e b*, le prime due cifre del numero a quattro cifre, sono individuabili necessariamente tra i quadrati perfetti a due cifre, quali:16, 25, 36, 49, 64 e 81;
- *c* e *d,* quali*:* 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Di conseguenza: 1600 < n^2 < 8181 da cui 40 < n < 91 e con n = 41, n^2 = **1 681** è una soluzione.
La ricerca può continuare per 42 < n < 50, 50 < n < 59,…. e alcuno di questi risponde alle condizioni poste su *ab* per cui si può concludere che la soluzione individuata sia unica. Da evidenziare che si escludono i multipli di 10.

Un'altra proposta di risoluzione

La condizione "Io sono il quadrato di un numero" porta a rappresentarlo come $(10a + b)^2$.
La condizione "Io sono un numero di 4 cifre" conduce al vincolo a ≥ 4.

Per **a = 4** si avrà: $(40 + b)^2 = 1\,600 + 80b + b^2$

La condizione "i numeri formati dalle mie prime due cifre e dalle mie due ultime cifre sono dei quadrati diversi non nulli" è verificata per **b = 1**. Infatti 1600 + 80 + 1 = **1 681** ($16 = 4^2$; $81 = 9^2$). Inoltre $1\,681 = 41^2$.

Può esserci un valore a > 4?
NO perché il doppio prodotto 20 ab è ≥ 100 e va a inficiare le prime due cifre che non risultano più un quadrato.

Esercizio n. 3 (7 punti) **Dadi e triangoli**

Si può procedere in modo empirico elencando la lista dei casi "possibili" con il risultato 1 del lancio del primo dado (in modo analogo poi per il risultato 4) e calcolando il numero di quelli "favorevoli" corrispondenti alle condizioni indicate nella consegna: 36 casi possibili di cui solo 6 favorevoli (evidenziati in rosso).

111					
112					
121	122				
113	123				
131	132	133			
114	124	134			
141	142	143	144		
115	125	135	145		
151	152	153	154	155	
116	126	136	146	156	
161	162	163	164	165	166

I casi favorevoli, sono infatti quelli che permettono la costruzione di un triangolo aventi come misura dei lati i risultati dei 3 lanci, es.1,5,5 perché 1 + 5 > 5, mentre non sono favorevoli quelli come ad es.1,3,4 in quanto il triangolo risulterebbe degenere 1 + 3 = 4, cioè i tre vertici sarebbero allineati, oppure il caso ad es.1,1,3 in cui il triangolo non sarebbe costruibile essendo 1 + 1 < 3.
Si conclude che la probabilità di vincere, se con il primo dado ottengo 1, è **1/6**.

Se si considera come primo risultato 4, analogamente si individuano sempre 36 casi possibili di cui favorevoli 24:

411					
412					
421	422				
413	423				
431	432	433			
414	424	434			
441	442	443	444		
415	425	435	445		
451	452	453	454	455	
416	426	436	446	456	
461	462	463	464	465	466

e si conclude che la probabilità di vincere, se con il primo dado ottengo 4, è **2/3**.

Esercizio n. 4 (5 punti) A due velocità

Il nucleo concettuale di questo problema riguarda la velocità media del percorso che non coincide con la media aritmetica delle due velocità ma si ricava dalla definizione stessa di velocità: $v_m = \frac{\Delta s}{t_m}$.
Perciò l'approccio richiede il calcolo del tempo medio:

$$t_m = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{6} + \frac{s}{14}\right)$$
$$t_m = \frac{5}{42}s$$

e si ricava che $\boldsymbol{v_m = 8{,}4\,\frac{km}{h}}$.

Approfondimento didattico

Dato che la velocità è inversamente proporzionale al tempo, la media aritmetica non è adeguata perché condurrebbe ad una sovrastima, in letteratura, infatti, si indica, come perfettamente adatta allo scopo, la media armonica che si può ricavare facilmente dalla media aritmetica, senza ricorrere alla sua formula, tenendo presente che la media armonica è il reciproco della media aritmetica del reciproco dei dati.

Si può, quindi, procedere con i calcoli seguenti:
1) reciproco dati 1/6; 1/14
2) media reciproci = 1/2 (1/6 +1/14)
3) reciproco media = 42/5 c.v.d

Esercizio n. 5 (7 punti) Sulla scalinata

Può essere utile ricorrere a una schematizzazione del tipo:

Laura	Michele	
n_L	n_M	passi
$2n_L$	$3n_M$	gradini

Dal testo è noto che:

$$\begin{cases} n_L = n_M + 250 \\ 2n_L = 3n_M \end{cases}$$

da cui si ricava che $n_M = 500$, $n_L = 750$ e si conclude che quando Laura s'incontra con Michele sono saliti entrambi di **1 500 gradini**.

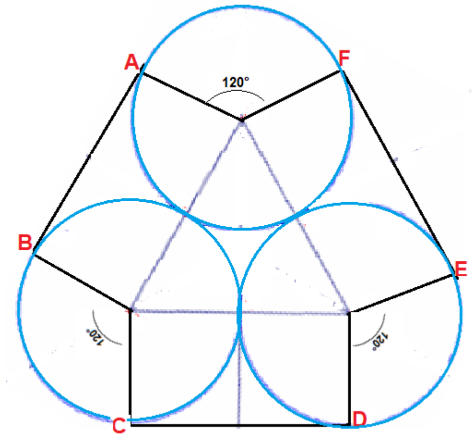
Esercizio n. 6 (5 punti) Pieno con errore

Se la virgola è stata omessa, dato che il costo è indicato al centesimo di euro, è come se il pieno costasse 100 volte il dovuto e, quindi, Francesco ha pagato 99 volte in più del dovuto.
Poiché nel testo è affermato quanto Francesco ha pagato, si può scrivere la seguente equazione:

1 826,55 € = 99 C

da cui si deduce che il costo corretto del pieno avrebbe dovuto essere di **18, 45 €**.

Esercizio n. 7 (7 punti) Leghiamo i pomodori



I tre archi di circonferenza AF, DE, BC di angolo al centro 120° misurano insieme 2π • 3 cm = 6π cm.

AB = EF = CD = 6 cm. Il nodo misura 20 cm e i legacci sono due.

La lunghezza minima di spago per ogni set è:

2(18 + 6π + 20) cm ≈ 114 cm

Esercizio n. 8 (5 punti) In pista

Occorre rilevare dalla osservazione attenta della figura che la differenza di allineamento delle partenze è dovuta alla differenza tra le lunghezze degli archi delle semicirconferenze percorse.

Si può scrivere

$a = \pi \cdot r_B - \pi \cdot r_A$ $\quad a = \pi(r_B - r_A)$ $\quad a = \pi \cdot 1{,}2$ m

analogamente $\quad b = \pi(r_C - r_B)$ $\quad b = \pi \cdot 1{,}2$ m.

A conclusione *a* = *b* = **3,77 m**.

Esercizio n. 9 (7 punti) A doppio senso

Scrivendo i numeri in forma polinomiale e tenendo conto delle consegne si ha:

4(1 000a + 100b + 10c + d) = 1 000d + 100c + 10b + a con le condizioni: a≠0, d≠0, a≤9. a numero pari

1 333a + 130b = 20c + 332d verificata da a = 2, b = 1, c = 7, d = 8 **2 178** x 4 = 8 712

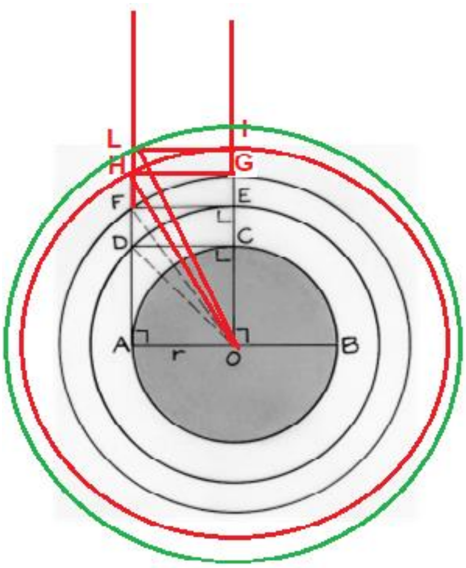
Un altro approccio risolutorio:

0 < a ≤ 2 non dovendo avere riporto la moltiplicazione 4a altrimenti avremmo un numero di 5 cifre; a non può essere 1 non potendo avere 1 come ultima cifra dopo la moltiplicazione per 4, quindi a = 2 e conseguentemente d = 8;

b moltiplicato per 4 non può avere riporto altrimenti il numero sarebbe di 5 cifre, quindi b < 3; b non può essere 2 dovendo le cifre essere tutte diverse, b non può essere 0 altrimenti si annullerebbe anche a, quindi, b = 1;

poiché 4•8 = 32 nella moltiplicazione di abcd per 4 avremo come riporto 3 e 4c + 3 deve avere come unità 1.
Ne consegue che c = 7; infatti 4•7 + 3 = 31 e **2 178** x 4 = 8 712.

Esercizio n. 10 (10 punti) Geomoltiplicatore



Premesso che di seguito si assimilerà il disco a un cerchio.

Per le proprietà della tangente risulta che AOCD è un quadrato la cui diagonale OD è r√2 e il **cerchio di centro O e raggio OD ha area 2πr²**.

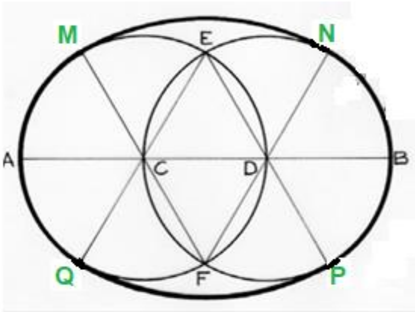
EC = (r√2 - r) $\quad OF^2 = FE^2 + EO^2$ $\quad OF^2 = r^2 + (r\sqrt{2})^2 = 3r^2$

➔ il **cerchio di centro O e raggio OF ha area 3πr²**.

Per avere cerchi di area quadrupla o n-upla si deve proseguire individuando i raggi r√3, 2r, …. r√n

OH = 2r OL= r√5 e proseguendo allo stesso modo s'individuano cerchi di area multipla dell'ordine voluto.

Speciale terze



Esercizio n. 11 (5 punti) **Pausa necessaria**

Elio si prende la pausa alle 23:10 e smette di giocare alle 23:45.

Riflessioni per la soluzione

1. Le cifre indicanti l'ora possono essere solo una coppia scelta fra ,1,2,3;
2. Le cifre indicanti ore e minuti possono variare da 0 a 9, ma per rispettare la condizione di consecutività le quaterne possibili possono essere solo 0, 1, 2, 3   1, 2, 3, 4   2, 3, 4, 5 dato che l'immagine digitale non supera come ore le 23.

Permutando i valori dei diversi gruppi dobbiamo escludere i valori che non rispettano le condizioni, ad esempio per la prima quaterna avremo $4! - 3! = 18$ situazioni.

01,23
01,32
02,13
02,13
……

23:10 +0:35 = **23:45**

Per ridurre i casi da esaminare, dopo le due considerazioni iniziali, si può riflettere solo sulla scelta delle cifre dei minuti e tenere conto dei 35 minuti di pausa che non devono determinare un cambio d'ora.

Se 23:45 fosse l'ora iniziale, la pausa terminerebbe il giorno dopo a 0:35, impossibile.

Ad esempio: con 01 otterremmo 36 (dopo la pausa), da scartare dato che il 6 non è contemplato nelle quaterne.
Con 10 si ottiene 45, possibile. Pensando alle ore si può considerare 23 (32 sarebbe assurdo) ➔ inizio pausa, quindi, **23:10**.

Esercizio n. 12 (7 punti) **Quasi cubo**

Il solido è formato da

- 7 cubi aventi lo spigolo di 1 m;
- 12 quarti di cilindro avente il raggio di base e l'altezza di 1 m che equivale a 3 cilindri;
- 1 sfera di raggio 1m.

Il volume totale è: $7\ m^3 + 3\pi\ m^3 + 4/3\ \pi\ m^3 \approx 20{,}61\ m^3$.

Approfondimento didattico

Per ogni faccia il luogo dei punti distanti 1m sono due quadrati di lato unitario che giacciono su piani paralleli alle facce che delimitano due cubi. Escludendo quelli che si ripetono i cubi sono 7.

Per ogni spigolo il luogo è un cilindro e i 3/4 del volume da essi delimitato è già racchiuso nei cubi precedenti. In tutto ci sono, quindi, 12/4 di cilindro, cioè 3 cilindri.

Per ogni vertice il luogo è una sfera; escludendo i volumi già considerati, per ogni vertice c'è 1/8 di sfera e quindi in tutto 8/8 di sfera, cioè 1 sfera.

Esercizio n. 13 (10 punti) **Oplà, si pattina**

Per costruzione ECD = CDF è un triangolo equilatero di lato 10 m.

MN è un arco la cui lunghezza è 1/6 di una circonferenza di centro F e raggio 20 m ➔ MN = $(2\pi \bullet 20) : 6$ m = $20/3\ \pi$ m.

MQ è un arco la cui lunghezza è 1/3 di una circonferenza di centro C e raggio 10 m ➔ MQ = $(2\pi \bullet 10) : 3$ m = $20/3\ \pi$ m.

La lunghezza della barriera, costituita da 4 archi di uguale lunghezza, è:
$80/3\ \pi$ m ≈ 83,73 m.   (83,73 m se si usa $\pi = 3{,}14$)

Nota: si sarebbe potuto affermare subito che gli archi MN, NP, PQ, QM hanno la stessa lunghezza in quanto
$1/6(2\pi \bullet 2r) = 1/3(2\pi \bullet r)$