Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 23 marzo 2021

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) **La cena dell'Assemblea Internazionale**

Si può procedere tramite una tabella inserendo le varie opzioni alcune delle quali cadono tenendo conto dei vincoli esplicitati nel testo.
Si ottiene, infine, la seguente ricostruzione:
il brasiliano ha ordinato un'insalata, la consorte delle lumache.

lo svizzero ha ordinato una tarte flambé, la consorte un'insalata alsaziana.

il tedesco ha ordinato delle lumache, la consorte una tarte flambé.

Schematizzabile, ad esempio,

Coppia ***brasiliana***		Coppia ***svizzera***		Coppia ***tedesca***	
Amico	Consorte	Amico	Consorte	Amico	Consorte
Insalata	Lumache	Tarte	Insalata	Lumache	Tarte

Esercizio n. 2 (5 punti) **I Dalton sono tornati**

Si considerano le possibili combinazioni che rispettano le prime due condizioni:

1,8,9 **2,7,9** 3,6,9 3,7,8 **4,5,9** 4,6,8 5,6,7

Di esse solo le due combinazioni:

279 $(9 \times 2 + 7 = 25 = 5^2)$ e **459** $(5 \times 9 + 4 = 49 = 7^2)$ rispettano anche la terza condizione.

Esercizio n. 3 (7 punti) **Che felicità!**

Costruendo le corrispondenti sequenze si individuano i cinque numeri "felici" richiesti: 1 ; 7 ; 10 ; 13 ; 19.

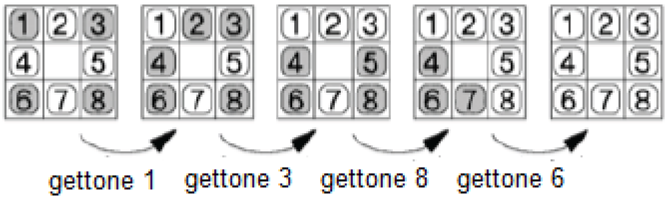
1 → 1
7 → 49 - 97 - 130 - 10 - 1
10 → 1
13 → 10 - 1
19 → 82 - 68 - 100 - 1

L'anno 2021 non è un anno "felice", ma "gioioso".
Infatti 2 021 → 9 - 81 - 65 - 61 - <u>37</u> - 58 - 89 - 145 - 42 - 20 - 4 - 16 – <u>37</u>
oppure si può osservare che $2\,021 = 2^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 = 9$ che non è nella lista dei numeri "felici" inferiori a 20.

Operando similmente per gli anni seguenti si ottiene che Il prossimo anno "felice" sarà il 2026.
Infatti, 2 026 → 44 - 32 - 13 - 10 - 1.

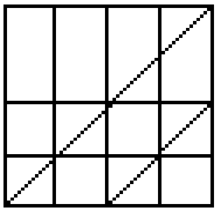
Esercizio n. 4 (5 punti) **Tutto bianco**

Per ottenere tutte facce bianche, girandone il meno possibile, occorre girare i gettoni 1, 3, 6, 8 nell'ordine che si preferisce.



Esercizio n. 5 (7 punti) **Prismi**

Prisma 1 avente per base un triangolo equilatero di lato 7 cm e altezza 30 cm.
Prisma 2 avente per base un triangolo equilatero di lato 10 cm e altezza 21 cm.



$A_{b1} = \frac{49\sqrt{3}}{4} cm^2$ $\qquad V_1 = \frac{49\sqrt{3}}{4} \cdot 30\ cm^3 = \frac{735}{2}\sqrt{3}\ cm^3$

$A_{b2} = 25\sqrt{3}\ cm^2$ $\qquad V_2 = 25\sqrt{3} \cdot 21\ cm^3 = 525\sqrt{3}\ cm^3$

(Nota: In classe deve essere valorizzata la tipologia di risposte che evidenzia per esempio la $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, o π senza inserire approssimazioni)

$V_2 > V_1$ $\qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{70}{49} = \frac{10}{7}$

Esercizio n. 6 (5 punti) **Copertura**

Il quadrato deve essere riprodotto con lato di 8 cm:

Le zone così individuate sono 18.

Esercizio n. 7 (7 punti) **Basi di ceppi**

L'altezza totale dei ceppi ammonta a 350 cm.
Sono, quindi, necessari 5 basi formate ciascuna da ceppi di altezza totale 70 cm.

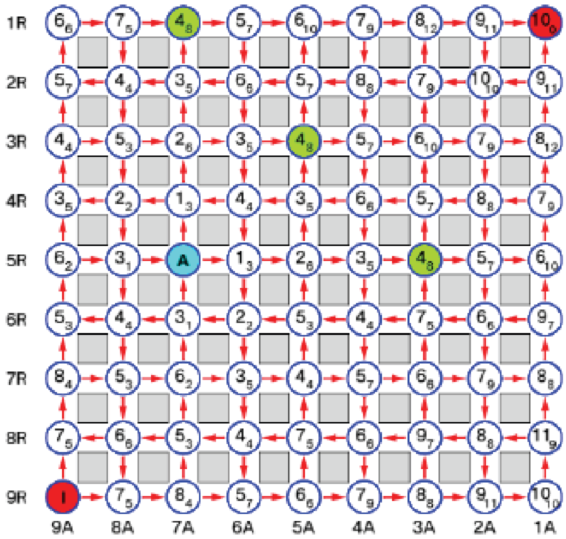
Le basi si compongono così: (60 + 10) cm ; (50 + 20) cm ; (40 + 30) cm ; (30 + 30 + 10) cm ; (30 + 20 + 20) cm.

Esercizio n. 8 (5 punti) **Michele cambia casa**

In ogni cerchio che indica l'incrocio è riportata la distanza di "andata" e di "ritorno" (in pedice).

Le tre possibili localizzazioni della casa di Michele sono indicate in verde e le coordinate sono:

(3_A ; 5_R) (5_A ; 3_R) (7_A ; 1_R). .



Esercizio n. 9 (7 punti) **Il dubbio di Mario**

I possessori dei biglietti 908 e 806 potrebbero presentarsi col biglietto vincente semplicemente girando di 180° il proprio biglietto.
Si osserva che, con tale movimento, le cifre 0 e 8 non cambiano mentre le cifre 6 e 9 si scambiano di valore.
La cifra delle unità del numero considerato non può essere 0.

Tutte le coppie di biglietti che presentano lo stesso problema sono: 6 e 9 ; 66 e 99 ; 68 e 89 ; 86 e 98 ;
606 e 909 ; 608 e 809 ; 666 e 999 ; 668 e 899 ; 669 e 699 ; 686 e 989 ; 688 e 889 ; 696 e 969 ; 698 e 869 ;
806 e 908 ; 866 e 998 ; 868 e 898 ; 886 e 988 ; 896 e 968 ; 966 e 996

Esercizio n. 10 (10 punti) **Cactus frattale**

I triangoli sono simili.

Il rapporto di similitudine è 3/5 per i triangoli rettangoli, via via considerati, che sono a sinistra mentre è 4/5 per i triangoli rettangoli a destra.

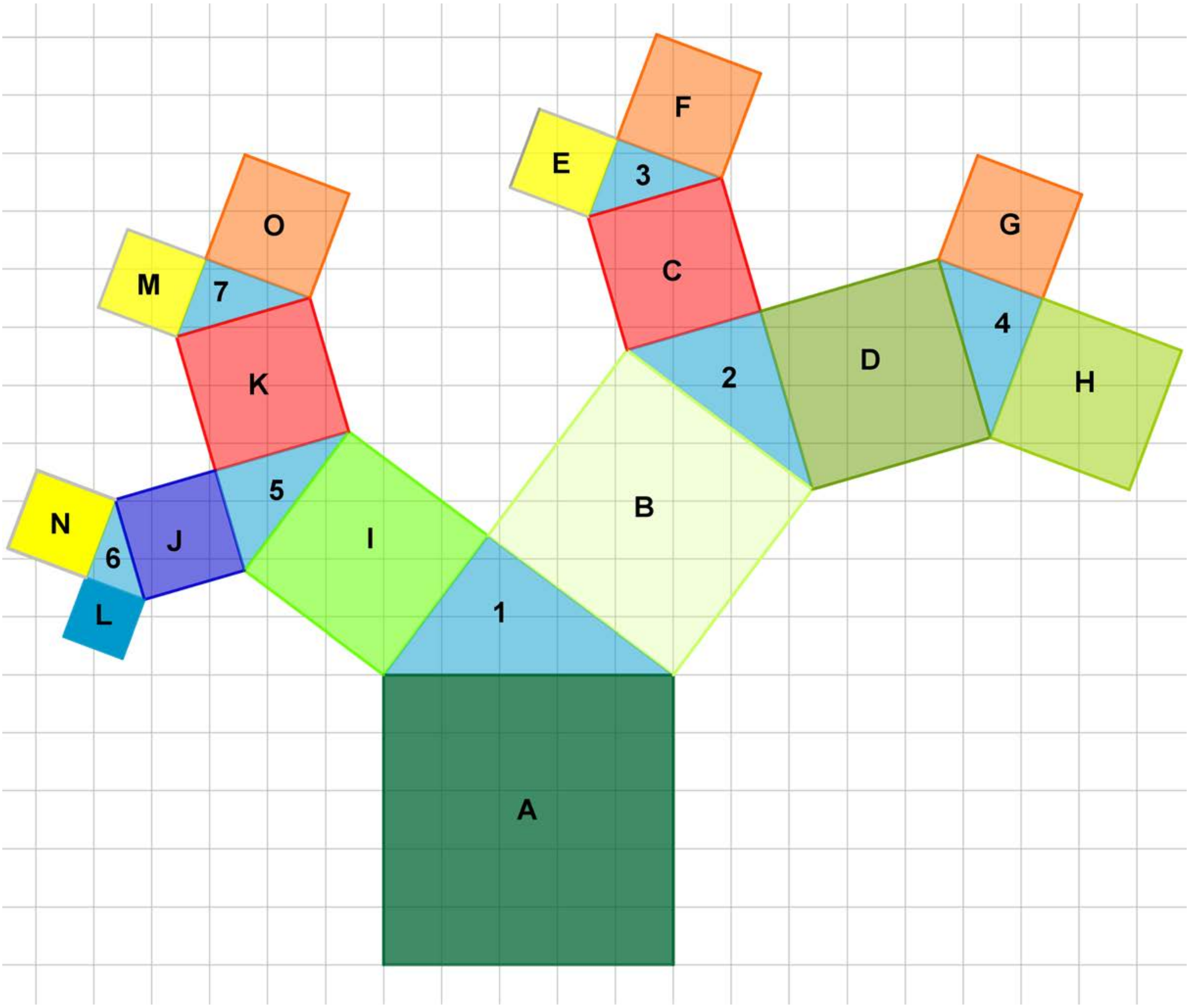
Il rapporto delle corrispondenti aree è rispettivamente 9/25 e 16/25.

I risultati del calcolo sono riportati in tabella:

Triangolo	1	2	3	4	5	6	7
Ipotenusa	5 cm	4 cm	2,4 cm	3,2 cm	3 cm	1,8 cm	2,4 cm
Cateto maggiore	4 cm	3,2 cm	1,92 cm	2,56 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm
Cateto minore	3 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm	1,8 cm	1,08 cm	1,44 cm

La rappresentazione è stata effettuata utilizzando una quadrettatura di lato 1 cm.

Si ottiene l'area dei quadrati in figura:



Quadrato A: 25 cm^2 Quadrato B: 16 cm^2 Quadrato I: 9 cm^2 Quadrato D : 10,24 cm^2

Quadrato H: 6,5536 cm^2 Quadrato J: 3,24 cm^2 Quadrato L: 1,1664 cm^2

I quadrati K e C hanno la stessa area: 5,76 cm^2

I quadrati O, F e G hanno la stessa area: 3,6864 cm^2

I quadrati M, N e E hanno la stessa area: 2,0736 cm^2.

Si può pervenire direttamente al calcolo delle aree richieste osservando che:
nella crescita progressiva del cactus il rapporto di similitudine tra il lato del quadrato che rappresenta ogni ramo di sinistra e il lato del quadrato che rappresenta il relativo tronco è 3/5, mentre per ogni ramo di destra tale rapporto è 4/5. Si deduce che l'area di ogni quadrato (ramo) si ottiene moltiplicando l'area del relativo quadrato (tronco) rispettivamente per 9/25 o 16/25.

$S_A = 25\ cm^2$ $S_I = 9\ cm^2$ $S_B = 16\ cm^2$

$S_J = 9 \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{81}{25}\ cm^2 = 3{,}24\ cm^2$

$S_K = 9 \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{144}{25}\ cm^2 = 5{,}76\ cm^2$

$S_L = \frac{81}{25} \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{729}{625} cm^2 = 1{,}1664\ cm^2$

$S_M = \frac{81}{25} \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{1296}{625} cm^2 = 2{,}0736\ cm^2$

$S_N = \frac{144}{25} \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{1296}{625} cm^2 = 2{,}0736\ cm^2$

$S_O = \frac{144}{25} \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{2304}{625} cm^2 = 3{,}6864\ cm^2$

$S_c = 16 \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{144}{25} cm^2 = 5{,}76\ cm^2$

$S_D = 16 \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{256}{25} cm^2 = 10{,}24\ cm^2$

$S_E = \frac{144}{25} \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{1296}{625} cm^2 = 2{,}0736\ cm^2$

$S_F = \frac{144}{25} \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{2304}{625} cm^2 = 3{,}6864\ cm^2$

$S_G = \frac{256}{25} \cdot \frac{9}{25} cm^2 = \frac{2304}{625} cm^2 = 3{,}6864\ cm^2$

$S_H = \frac{256}{25} \cdot \frac{16}{25} cm^2 = \frac{4096}{625} cm^2 = 6{,}5536\ cm^2$

Approfondimento didattico

Nota: attenzione ai risultati accettabili anche approssimati a due cifre decimali, purché approssimati e non troncati.
In classe il quesito si presta a un approfondimento sull'errore relativo e assoluto della misura in base al numero di cifre decimali considerate.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **Si attacca!**

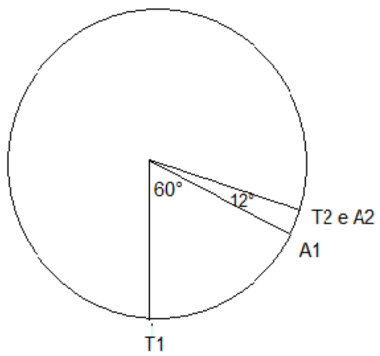
Si può procedere per tentativi con il ricorso a una tabella pervenendo alla suddivisione che rispetta tutti i vincoli

8 francobolli da 0,50 € 5 da 0,20 € 50 da 0,10 per un totale di (4 + 1 + 5) € = 10 €.

oppure a partire dall'impostazione di un sistema del tipo:
0,10 x + 0,20 y + 0,50 z = 10
x = 10 y
A tentativi si trovano i valori interi richiesti.

Approfondimento didattico
L'introduzione dell'equazione diofantea.

Esercizio n. 12 (7 punti) **In barca**



Indicati con A il ragazzo e con T la sua amica, dalle ipotesi del testo si deduce che T fa sei giri completi, mentre A ne fa uno solo.

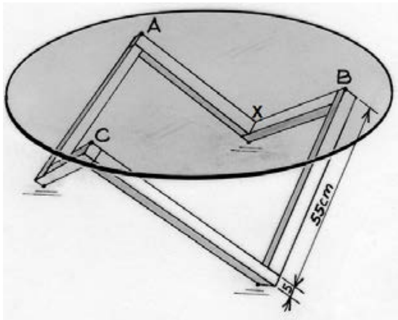
In un minuto A percorre un arco di 6°, mentre T ne percorre uno di 36°.
Dopo 10 minuti A si troverà nella posizione A1, mentre T avrà percorso un intero giro e si troverà nella posizione T1.
Per ritrovarsi insieme dovranno passare altri 2 minuti per un totale di **12 minuti.**

L'esercizio può essere risolto anche per tentativi con una tabella del tipo*:*

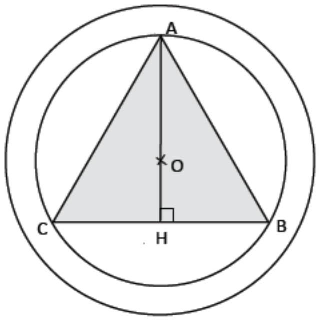
Tempo in minuti	Percorso di T in giri	Percorso di A in giri
1	1/10	1/60
2	1/5	1/30

3	3/10	1/20
…………	…………	…………
…………	…………	…………
12	1 + 1/5	1/5

Esercizio n. 13 (10 punti) **Piedi sotto il tavolo**



Si esamina attentamente la struttura di supporto del tavolino:
l'ipotenusa AB del triangolo rettangolo isoscele ABX (figura a lato) misura 55√2 cm e, quindi, si deduce che ABC è un triangolo equilatero di lato 55√2 cm ~ 77,78 cm



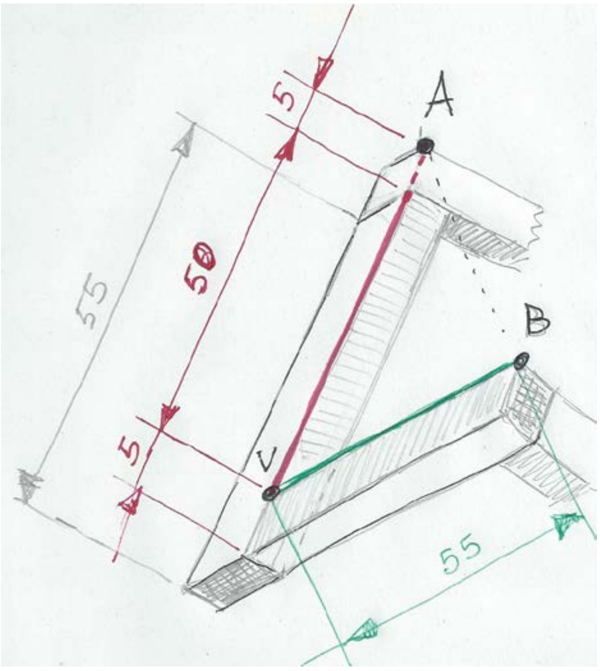
$$AH = 55\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm = 55\frac{\sqrt{6}}{2}\ cm \qquad AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\left(55\frac{\sqrt{6}}{2}\right)cm = \frac{55\sqrt{6}}{3}cm$$

Il raggio del piano circolare del tavolo è: $r = \left(10 + \frac{55\sqrt{6}}{3}\right)cm \approx 54{,}9\ cm$.

Approfondimento didattico

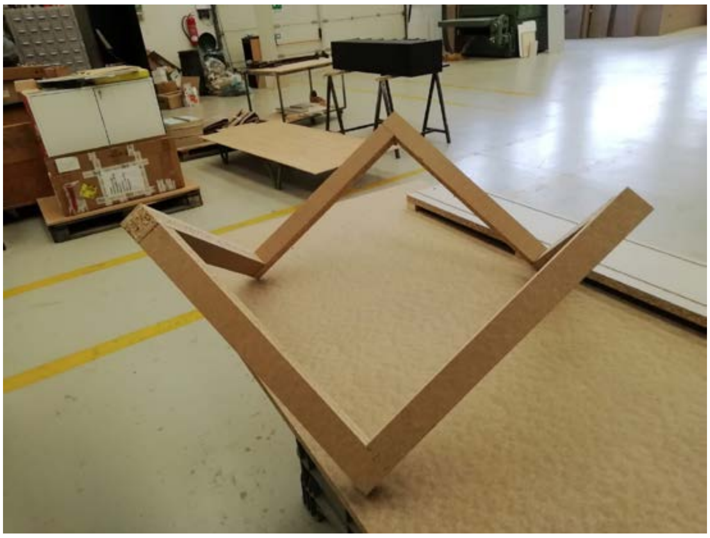
Durante la correzione in classe è opportuno ragionare sulla situazione raffigurata e porre l'attenzione sui punti di appoggio sotto il piano di vetro e sulla base del pavimento per individuare le misure corrette.

Utile è ad esempio uno schizzo di questo tipo da cui si deduce che le lunghezze dei listelli considerati sono indipendenti dallo spessore



Per rendere ancora più evidente la costruzione l'equipe si è rivolta a un artigiano falegname che utilizza macchine a calcolo numerico ed ecco la foto della struttura di base lignea realizzata con riportate le misure ottenute (approssimate):

$l_T = 78$ cm $D = 110$ cm



Nota

Durante la correzione degli elaborati della competizione si è rilevato che alcune classi hanno frainteso la figura presente nel testo considerandola misura del lato del triangolo equilatero, invece di $55\sqrt{2}$ cm, $60\sqrt{2}$ cm.

Di conseguenza, se operato coerentemente, hanno ottenuto

$$r = \left(10 + 20\sqrt{6}\right)cm \approx 59\ cm$$

Nella valutazione si è tenuto conto della difficoltà interpretativa della figura di riferimento della situazione descritta nel testo (vedasi tabella di valutazione)