Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 22 febbraio 2018

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (punti 7) Esperti e maldestri

Occorreranno almeno 16 minuti affinché tutti abbiano attraversato considerando che la soluzione ottimale è:

- Aline e Pierre attraversano il fiume in 2 minuti
- Pierre (o Aline) ritorna in 2 minuti
- I tre maldestri (Hélène, Zoé et Jules) attraversano in 8 minuti
- Aline (o Pierre) ritorna in 2 minuti
- Pierre e Aline riattraversano in 2 minuti.

Esercizio n. 2 (5 punti) In costruzione

Al centro 1 cubo rosso di 5 g.
Attorno al cubo rosso 26 (vedasi 27 – 1) cubi blu di 8 g che formano una massa di 208 g.
Attorno alla costruzione precedente 98 (ossia 125 – 27) cubi gialli di 12 g che formano una massa di 1 176 g.

In totale 5 + 208 + 1 176 = 1 389 g.

La massa della costruzione realizzata è, dunque, di **1 389 g**.

Esercizio n. 3 (7 punti) Bivacco

Per la risoluzione si utilizza essenzialmente il teorema di Pitagora.

BC ipotenusa del triangolo CMB,

BC = $\sqrt{90^2+90^2}=\sqrt{16\,200}$ cm

HC ipotenusa del triangolo HBC,

HC = $\sqrt{120^2+16\,200}=\sqrt{30\,600}$ cm

e HC = CG = GE = HE.

HF ipotenusa del triangolo HBF,

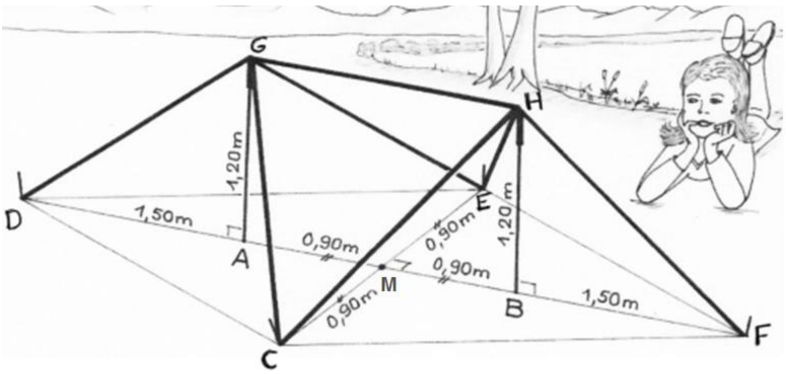
HF = $\sqrt{120^2+150^2}=\sqrt{36\,900}\approx 192{,}1$ cm

e HF = DG.

CF, ipotenusa del triangolo CMF,

CF = $\sqrt{90^2+(90+150)^2}=\sqrt{65\,700}\approx 256{,}3$ cm

e CF = DC = DE = EF.

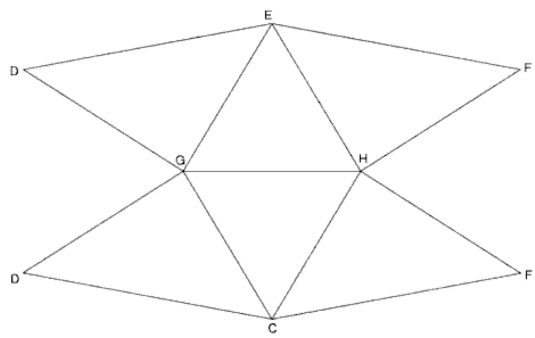


Ecco a latere lo sviluppo (non in scala):

In realtà, nello sviluppo GH = 6 cm;

HC = CG = GE = HE ≈ 5,8 cm; HF = DG ≈ 6,4 cm;

CF = DC = DE = EF ≈ 8,5 cm.



Esercizio n. 4 (5 punti) Incubatrice per pulcini

La difficoltà della soluzione è l'individuazione dell'inizio; per esempio: se nella prima colonna le tre lampade non possono occupare che 4 posti e non 7, si può procedere speditamente.

	3	1	3	1	2	2	1	2
3		↓	P	←		→	P	
1		P				P	P	←
2			→	P		↑		
1	→	P			P			
3			→	P	↑			↓
1	↓		P					P
1	P		↑				P	
3	→	P		P	←		↑	

In base alla scelta della prima colonna, l'unico riscaldamento della seconda colonna non ha che due posizioni possibili e i tre riscaldamenti della terza colonna obbligano a posizionare correttamente i riscaldamenti delle due prime colonne.

Esercizio n. 5 (7 punti) Somma minima

Una riflessione iniziale: meno cifre ha un numero, più è piccolo, anche se le cifre sono grandi.
Occorre, quindi, cercare dei numeri che terminino con un determinato numero di 9, preceduti dalla cifra il cui valore è la differenza dal totale richiesto.

Per **12** (12 = 9 + 3) si ha **39**.
Per **38** (38 = 9 x 4 + 2) si ha **29 999**.
Per **2018** (2018 = 224 x 9 + 2) si ha **2** seguito da **224** volte **9**.

Esercizio n. 6 (5 punti) Si chiudano le tende!

Ecco una soluzione:

1, 2, 3, 4, 5 sono visibili sul disegno.

Altrettanto facilmente s'individuano le altre combinazioni:

6 = 1 + 5; 7 = 4 + 3; 8 = 2 + 1 + 5; 9 = 5 + 4 e 10 = 1 + 5 + 4.

Esercizio n. 7 (7 punti) Operazione "ettogono"

La somma degli angoli di rotazione deve essere 360° e, quindi, in corrispondenza di ogni vertice la rotazione sarà di 3,6°.

Poiché si assimila l'ettogono a un cerchio, il suo perimetro sarà circa di 62,8 cm ($2\pi \times 10 \approx 62{,}8$ cm) e occorreranno 100 passi di 6,28 mm ciascuno per percorrerlo.

Di conseguenza, la consegna per il robot è:
"Ripetere 100 volte [Avanzare di 6,28 mm, poi ruotare a sinistra di 3,6°]"

Si otterrà così un ettogono i cui vertici sono disposti pressappoco su una circonferenza di 10 cm di raggio.

Esercizio n. 8 (5 punti) Il cuore nell'allenamento

Si completa la tabella con i valori relativi alla frequenza cardiaca di riserva (fcr) e a E.
Si calcola E/ fcr che si confronta con 0,6 ; 0,7 e 0,8……

Nome	Frequenza a riposo	Frequenza massima	fcr	Frequenza misurata	E=f.mis.–f.rip.	E/fcr	Tipo di sforzo
Marc	60	180	120	108	48	0,4	Riscaldamento/recupero
Luc	65	175	110	155	90	0,81	Anaerobico
Matthieu	70	170	100	135	65	0,65	Resistenza fondamentale
Jean	80	162	82	142	62	0,76	Resistenza attiva

Dalla tabella si deduce che:

Lo sforzo di Luc è di tipo anaerobico; lo sforzo di Matthieu è del tipo resistenza fondamentale, lo sforzo di Jean del tipo resistenza attiva.

Esercizio n. 9 (7 punti) Lettura della pompa

Si può ricorrere ad una semplice equazione:

Indicato con ***l*** il numero dei litri, la condizione richiesta si traduce in

1,032 ***l* - *l*** = 1 da cui ***l*** = 1/0,032 cioè 31,25 litri.

Pertanto il quadrante si presenta come nella figura a lato.

0	3	2	,	2	5	€
0	3	1	,	2	5	litri
1,032 € per litro						

Nel caso in cui la risoluzione sia effettuata per tentativi occorre, naturalmente, procedere comunque con approssimazione corretta ma si potrebbero verificare dei casi in cui gli studenti abbiano effettuato troncamento, sempre a 10^{-2}.

Fermo restando il rispetto del vincolo della differenza tra prezzo e volume di 1, la visualizzazione prevista potrebbe non essere unica ma accettabile

- nel caso di approssimazione **31,10 ≤ l ≤ 31,40**
- nel caso di troncamento **31,25 ≤ l ≤ 31,56** (individuabile studiando la seguente disequazione: **1 ≤ *l* • 0,032 < 1,00999**)

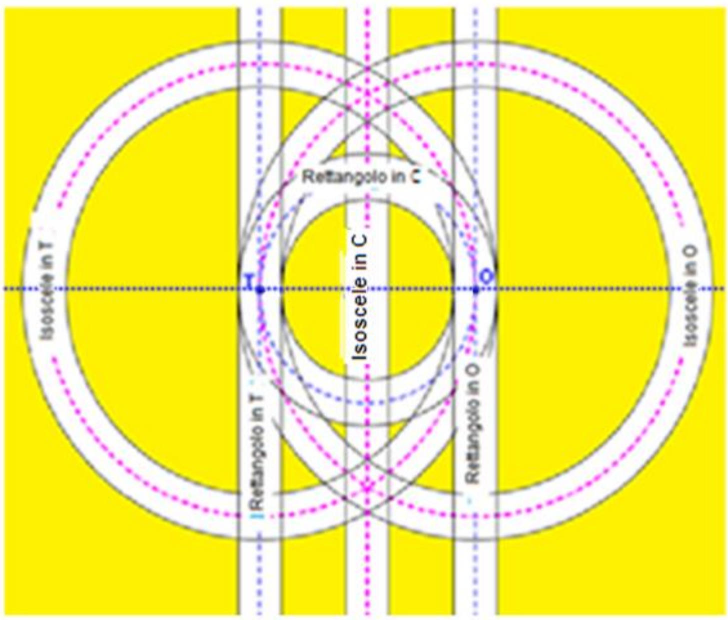
Esercizio n. 10 (punti 10) Qualunque?

L'insieme dei punti C tali che TOC sia isoscele in C è l'asse di TO.
L'insieme dei punti C tali che TOC sia isoscele in T è la circonferenza di centro T e raggio TO.
L'insieme dei punti C tali che TOC sia isoscele in O è la circonferenza di centro O e raggio TO.

L'insieme dei punti C tali che TOC sia rettangolo in C è la circonferenza di diametro TO.
L'insieme dei punti C tali che TOC sia rettangolo in T è la perpendicolare in T a TO.
L'insieme dei punti C tali che TOC sia rettangolo in O è la perpendicolare in O a TO

Poi, si esclude l'insieme dei punti che sono a una distanza inferiore di 1 cm dalle figure considerate e si colora la parte restante.

L'esercizio permette l'introduzione di riflessione sul concetto di "triangolo degenere" che porta alla esclusione dalla parte colorata dei punti appartenenti alla retta orizzontale (punteggiata nella figura).

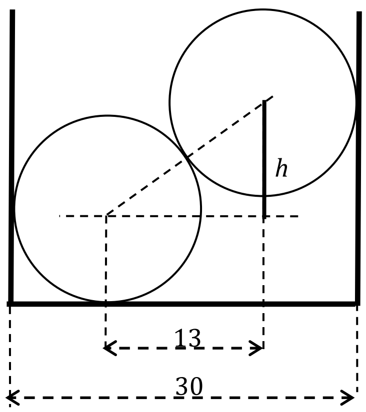


Esercizio n.11 (5 punti) **Lancette a squadra**

Una possibile spiegazione: fra mezzogiorno e mezzanotte la lancetta grande compie 12 giri completi e la piccola ne compie uno. Un osservatore seduto sulla lancetta piccola, senza occuparsi del quadrante, vedrebbe la lancetta grande fare 11 giri completi in rapporto alla piccola e nel corso di questo movimento formerebbe 11 volte un angolo (retto) orientato di 90° e 11 volte un angolo di 270°con la lancetta piccola, cioè 22 angoli retti.

Tra mezzogiorno e mezzanotte le due lancette formano 22 volte un angolo retto.

Esercizio n. 12 (7 punti) **Riempite il cesto**



Immaginiamo che nel cesto ci sia un pallone; se ne aggiunge un altro, l'altezza totale aumenta di *h.* Essa è dunque 17+*h*

con $h = \sqrt{17^2 - 13^2} = \sqrt{120} \approx 10{,}95$ cm

Si può procedere per tentativi, per esempio con l'aggiunta di 2 palloni (3 palloni in totale) l'altezza è $h_3 = (17 + 2 \cdot \sqrt{120})$ cm e così via; con l'aggiunta di 7 palloni

$h_8 = (17 + 7 \cdot \sqrt{120})$ cm $h_8 \approx 93{,}68$ cm mentre aggiungendo 8 palloni si supererebbe l'altezza del cesto.

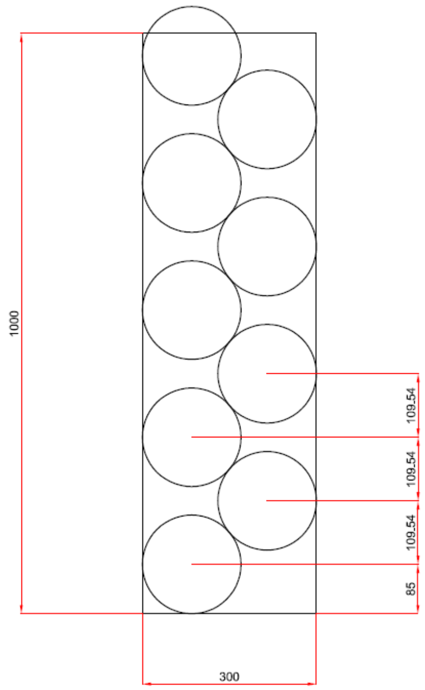
Si conclude, quindi, che nel cesto si possono riporre al massimo 8 palloni.

Denominato *n* il numero totale dei palloni contenuti nel cesto, tramite l'impostazione della seguente disequazione

$17 + h \times (n - 1) \leq 100$ e la sua risoluzione (siccome n deve essere intero),

si ha n = 8.

Nel disegno seguente è rappresentata la situazione che si determina nel cesto:



Esercizio n. 13 (10 punti) **Marte in quadratura**

Sia α l'angolo TST' e β l'angolo MSM' (*M* e *T* posizioni al 14/7; *M'* e *T'* posizioni al 28/10)

$$\frac{360}{365} = \frac{\alpha}{106} \quad \text{e} \quad \frac{360}{687} = \frac{\beta}{106} \qquad \cos(\alpha - \beta) = \frac{ST'}{M'S}$$

$$M'S = MS = \frac{ST'}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{ST}{\cos(\alpha - \beta)} \approx 228 \times 10^6$$

Una distanza approssimata di Marte-Sole può essere considerata, quindi, pari a **228 000 000 Km**.

Nota: sono accettati, per la misura della distanza richiesta, valori compresi tra 227 e 229 milioni di km.

La risoluzione poteva essere effettuata anche tramite il ricorso alla terza legge di Keplero:
"I periodi orbitali elevati al quadrato sono proporzionali ai semiassi maggiori dell'orbita, elevati al cubo", cioè

$P^2 = k\, a^3$ dove la costante è uguale per tutti i pianeti.