Mathématiques SANS Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 25 febbraio 2016

Proposta di soluzione

Esercizio 1 (7 punti) La cioccolata calda

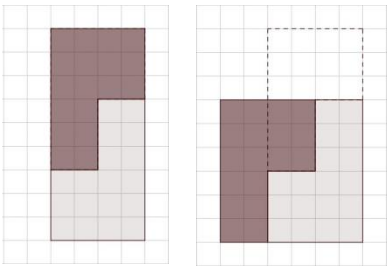
E' sufficiente che uno dei ragazzi non voglia la cioccolata calda perché la risposta sia NO.

- **Anatole non risponde NO,** quindi vuole la cioccolata, ma non sa se Benjamin e Chloé la vogliano e, quindi, risponde "**non lo so**".

- **Benjamin non risponde NO,** quindi vuole la cioccolata, ma non sa se Chloé la voglia e, quindi, risponde "**non lo so**".

- **Chloé**, che desidera la cioccolata calda, ha ascoltato e capito le risposte dei fratelli e, quindi, può rispondere "**SI**".

Esercizio 2 (5 punti) Fare quadrato



Si può calcolare l'area del rettangolo per conoscere il lato del quadrato e, poi, individuare il taglio richiesto.

.

Esercizio 3 (7 punti) Torneo di calcio

Squadre	Numero partite vinte	Numero partite pareggiate	Numero partite perse	Numero goal fatti	Numero goal incassati
Le onde blu	1	0	1	3	2
Stella marina	0	1	1	0	2
La pineta	1	1	0	2	1

«*Le onde blu*» hanno fatto più goal di quanti ne hanno incassati perciò non possono aver pareggiato la partita non persa.

«*Stella marina*» non ha fatto goal quindi non può aver vinto una partita. Si deduce che ha pareggiato 0 a 0 con « La pineta».

«*La pineta*» ha vinto 2-1 con «*Le onde blu*».

Esercizio 4 (5 punti) Carte affiancate

D 5	D 1	D 2	D 6	**A 6**	A 5	**A 1**	A 2
B 5	**B 1**	B 2	**B 6**	C 6	**C 5**	C 1	**C 2**
B 8	B 4	**B 3**	B 7	**C 7**	C 8	**C 4**	C 3
A 8	**A 4**	A 3	A 7	D 7	**D 8**	D 4	**D 3**

Esercizio 5 (7 punti) Ne rimane uno soltanto!

Si considera la somma dei numeri scritti e si osserva che essa diminuisce di 1 ad ogni passaggio.
All'inizio tale somma risulta 1+2+3+…+10 = 55
Alla fine dei 9 passaggi, necessari perché resti un sol numero scritto, la somma è 55 – 9 = **46**.
Con i numeri da 1 a 100, il numero ottenuto è: (1+2+3+…+100) – 99 = 5 050 – 99 = **4 951**.

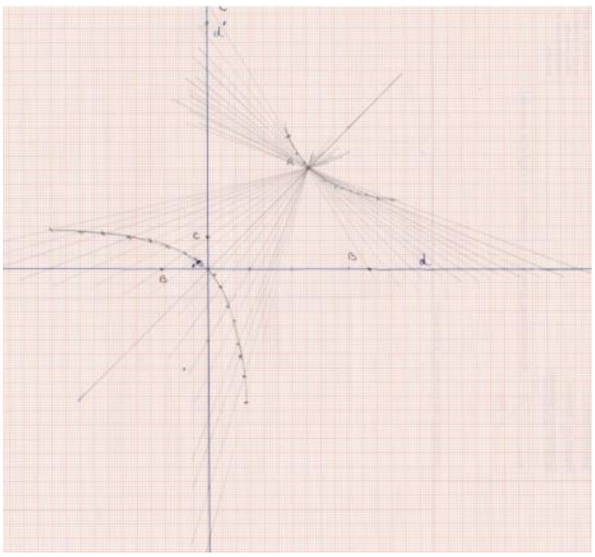
Esercizio 6 (5 punti) Il valzer dei saluti

Le strette di mano fra insegnanti e studenti sono 3 x 24 = 72. Restano, quindi, 118 – 72 = 46 strette di mano o fra insegnanti o fra studenti maschi.
La classe può procedere per tentativi; ad esempio, per 9 studenti maschi, si hanno 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 strette di mano. Rimangono 10 strette per gli insegnanti, il che è impossibile.
Ci devono essere più studenti maschi! Per 10 studenti maschi si contano 45 strette. Rimane 1 stretta per gli insegnanti. Da ciò si deduce che ci sono 2 insegnanti maschi.
In conclusione, partecipano al viaggio 14 ragazze e un'insegnante femmina.
Le strette di mano fra insegnanti e studenti sono 3 x 24 = 72. Restano, quindi, 118 – 72 = 46 strette di mano o fra insegnanti o fra studenti maschi.

Altra strategia di risoluzione è il ricorso, invece che per tentativi, al calcolo combinatorio.
Indicati con x il numero di studenti maschi e con y il numero di strette di mano tra docenti maschi si ha: $C_{x,2} + y = 46$.
da cui $\frac{x(x-1)}{2} + y = 46$. Solo per $y = 1$, valore corrispondente a 2 insegnanti maschi, questa equazione restituisce un valore intero accettabile per l'incognita x .
Infatti $\frac{x(x-1)}{2} + 1 = 46$ $\quad x^2 - x = 90 \quad (x+9)(x-10)= 0$ da cui $x = 10$.
Poiché la classe è di 24 studenti di cui 10 maschi, le alunne sono 14 con un'insegnante femmina.

Esercizio 7 (7 punti) Un lungo percorso

Si ottiene un'iperbole:

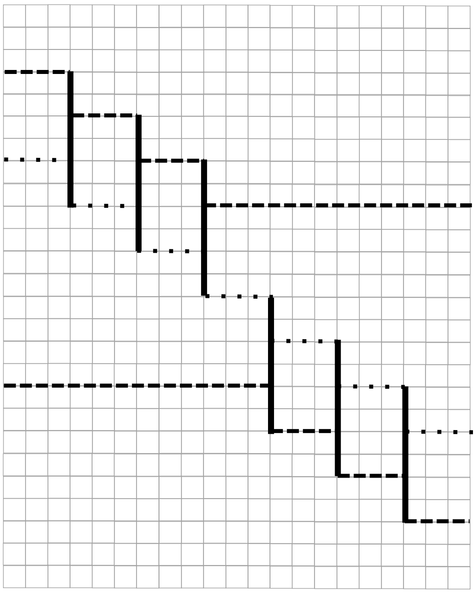


- Oltre alla soluzione riportata esistono altre tre iperboli che risultano essere simmetriche rispetto all'origine O degli assi *d* e *d'* quando *d* coincide con l'asse x e *d'* con l'asse y. Scambiando *d* con *d'* si riottengono i quattro casi precedenti.

- Cambia l'iperbole (da funziona omografica a iperbole equilatera riferita ai propri assi) quando si considera *d* e *d'* coincidenti con le bisettrici dei quadranti e le bisettrici di *d* e *d'* coincidenti con gli assi cartesiani.

- Ci possono essere, inoltre, anche i casi in cui *d* e *d'* (perpendicolari tra loro) sono tracciati sul piano genericamente.

Esercizio 8 (5 punti) **Kirigami**

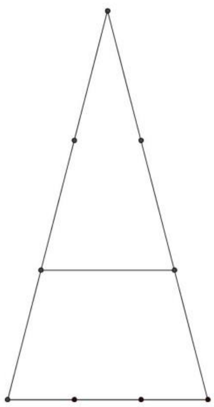
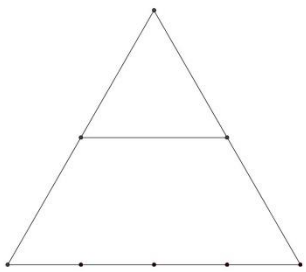


Si piegano all'indietro i segmenti tratteggiati (**-----**)

Si piegano in avanti quelli punteggiati (**. . . . .**)

Si taglia seguendo i segmenti a tratto intero (____).

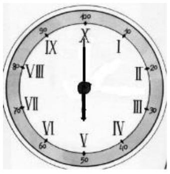
Esercizio 9 (7 punti) **Piramidoni!**

Faccia laterale		
	$b = 3\times 8$ $b = 24$ cm $a = 3\times 4$ $a = 12$ cm	$b = 2\times 8$ $b = 16$ cm $a = 4\times 4$ $a = 16$ cm
Altezza della piramide	$H_1 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$ $H_1 = \sqrt{24^2 - \frac{12^2}{2}}$ $H_1 = \sqrt{504}$ $H_1 \cong 22{,}4\ cm$	Analogamente si calcola $H_2 \cong 11{,}3\ cm$

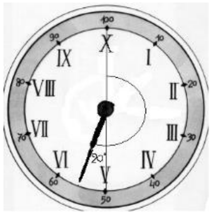
Esercizio 10 (10 punti) **Lancette a voi, cittadini!**

Alle ore 12 la lancetta piccola ha percorso metà del quadrante; essa si trova sul 5 e la lancetta grande è sul 10.

La pausa pasto dura 1h e 20 minuti che corrispondono a 1/18 di giorno; di conseguenza, a partire dal "5" la lancetta piccola avanza di 1/18 x 360° = 20°



orologio a mezzogiorno



orologio alle 13:20

1h e 20 minuti, misurati in «minuti decimali», corrispondono a

$$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{72}\right) \text{x} 10 \text{ x } 100 = \frac{1\,000}{18}$$

La lancetta grande percorre un angolo di

$$\frac{360°\,\frac{1\,000}{18}}{100} = 200°$$

e si sovrappone, così, alla lancetta piccola.

Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti) **Due pezzi**

Si può ragionare sia sui volumi sia sulle aree perché l'altezza è costante.

Detta x la lunghezza del lato della base quadrata del pezzo di polistirolo si può scrivere:

$x^2 - 400 < 400$ e $x^2 - 361 > 361$

con le rispettive soluzioni **x_1 = 27 cm** e **x_2 = 28 cm**.

Esercizio 12 (7 punti) **Invariante del pentagono**

Detta x la lunghezza del lato del pentagono e A l'area del pentagono, si scompone questo pentagono in 5 triangoli aventi per base i lati del pentagono e vertice comune M

$$\mathrm{A} = \frac{x \times a}{2} + \frac{x \times b}{2} + \frac{x \times c}{2} + \frac{x \times d}{2} + \frac{x \times e}{2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{x}{2}(a + b + c + d + e)$$

da cui $$a + b + c + d + e = \frac{2\mathrm{A}}{x}$$

Quando si sposta il punto M, l'area A e la misura del lato x rimangono invariate e, quindi, la somma

a + b + c + d + e **è costante, indipendentemente dalla posizione di M**.

Esercizio 13 (10 punti) **Pieghe frazionate**

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo piccolo si ha $x^2 + (1/4)^2 = (1 - x)^2$ da cui $x = 15/32$.

I due triangoli anneriti sono simili per cui $y : (3/4) = (1/4) : x$ da cui $y = 2/5$.

Allo stesso risultato si può pervenire per via trigonometrica.

Per ottenere 1/5 del lato del foglio, è sufficiente piegare in due il lato y.