Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 10 Febbraio 2015

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) **I poligoni di Camille**

Si considera un poligono di n vertici e la definizione di diagonale; da un vertice si possono condurre n-3 diagonali e quindi con n vertici se ne possono condurre n(n-3). Tenendo però conto che ogni diagonale è stata considerata due volte, occorre dividere tale risultato per 2. Il numero delle diagonali di un poligono di n vertici è, quindi, $\frac{1}{2}n(n-3)$

Oppure si può ragionare nel seguente modo:

si dimentichi per un attimo il poligono e lo si sostituisca con l'insieme degli n punti corrispondenti ai vertici. Si traccino da ciascun punto le "diagonali" verso ognuno dei restanti n-1 (per semplicità ora non si farà distinzioni fra lati e diagonali); si ha, quindi, che da ogni vertice del poligono partono in totale n-1 diagonali; se, però, le si vogliono contare correttamente occorre fare il seguente ragionamento:

Vertice	Numero "diagonali" con origine nel vertice
A_1	n -1
A_2	n - 2 (si toglie quella proveniente da A_1)
A_3	n - 3 (si tolgono quelle provenienti da A_1 e A_2);
……..	………….
A_{n-1}	n - (n-1) = 1
A_n	n - n =0
	$N_t = \frac{1}{2}n(n-1)$ (sommatoria progressione aritmetica)

Questo numero però comprende anche le "diagonali" che coincidono con i lati (congiungenti vertici consecutivi) , quindi $N_t = \frac{1}{2}n(n-1) - n = \frac{1}{2}n(n-3)$

N vertici	D =n diagonali
6	9
7	14
8	20
100 15 16	**Non è possibile.** Lo si evidenzia con considerazioni relative alla scomposizione in fattori con il ricorso a approssimazioni successive o risolvendo una equazione. 90 104

Nota storica: Camille Jordan (Lione, 5 gennaio 1838 – Parigi, 22 gennaio 1922), è stato un matematico francese che, tra tanti studi, ne ha dedicato uno alla poligonale, caso semplificato del poliedro e delle relative diagonali.

Esercizio n. 2 (5 punti) Decrescita programmata

Alcune osservazioni :

- i numeri da esaminare devono avere due cifre,
- se si permutano le due cifre del primo numero, i numeri seguenti non cambiano, come pure la lunghezza della lista,
- i numeri che contengono 0 oppure 1 determinano successioni di 2 elementi,
- i numeri che contengono 2 determinano successioni di 3 elementi,
- ………..

Per **77** si ha 49 ; 36 ; 18 ; 8. E' **77** che origina la successione più lunga.

Esercizio n. 3 (7 punti) Un giro sulla tavola

Dopo un giro, le ruote avanzano di 50π cm, la tavola avanza di 10π cm.

La tavola, quindi, con riferimento al suolo, avanza di $(50\pi + 10\pi)$ = **60π cm**, cioè, di circa **188,5 cm**.

Nota: poiché il risultato dipende dall'approssimazione di π, sono accettabili anche valori quali 188,40 – 188,4 – 188,49 – 188,5

Esercizio n. 4 (5 punti) Tetrathlon

Le soluzioni sono plurime. (Denominiamo le squadre rispettivamente A – B – C – D – E – F – G – H)

Esempio della rappresentazione di una possibile soluzione tramite la seguente tabella:

Pallavolo	Calcio	Pallamano	Rugby
A - B	A - C	A - D	A - E
C - D	E - G	C - E	C - F
E - F	F - B	F - H	B - H
G - H	D - H	B - G	D - G

Esempio della rappresentazione di un'altra possibile soluzione tramite una tabella a doppia entrata:

	E	F	G	H
A	**Pallavolo**	**Calcio**	**Pallamano**	**Rugby**
B	**Rugby**	**Pallavolo**	**Calcio**	**Pallamano**
C	**Pallamano**	**Rugby**	**Pallavolo**	**Calcio**
D	**Calcio**	**Pallamano**	**Rugby**	**Pallavolo**

Esercizio n. 5 (7 punti) **Cerchio nel cerchio**

BCD è un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 6 cm.

Ogni lato dista, quindi, 3 cm dal centro della circonferenza.

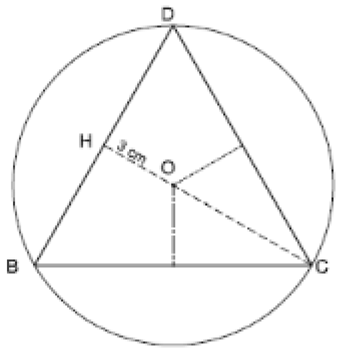


Fig. 1

Utilizzando questa proprietà, il triangolo equilatero richiesto si ottiene conducendo per A la corda EF tangente alla circonferenza di raggio 3 cm (Fig. 2).

Il triangolo si completa conducendo dai punti E ed F le tangenti al cerchio di raggio 3 cm.

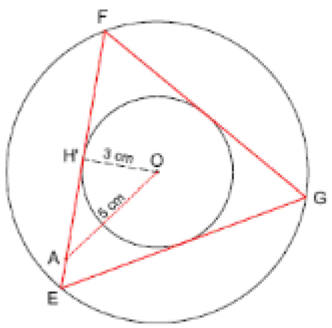


Fig. 2

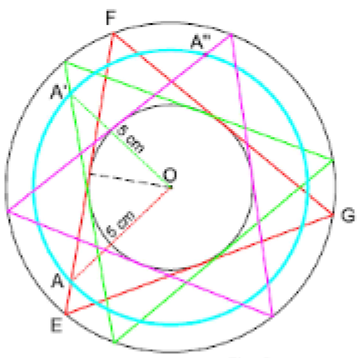
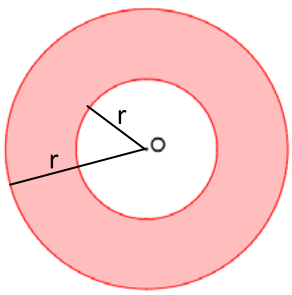


Fig. 3



La costruzione è possibile per tutti i punti con distanza $3 \leq d \leq 6$.

La costruzione del triangolo equilatero richiesto può anche essere effettuata procedendo nel seguente modo:

- si costruisce con riga e compasso un qualunque triangolo equilatero inscritto

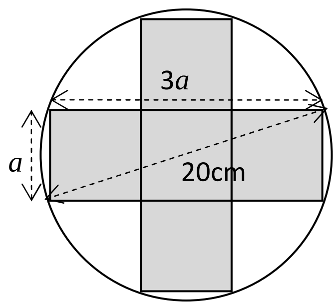
- si considera un punto A distante 5 cm dal centro
- si disegna, quindi, la circonferenza di centro O e raggio OA che taglia il triangolo in 6 punti……..
- ………

Esercizio n. 6 (5 punti) **Il club dei cinque**

Si può risolvere sia graficamente sia con una equazione.
Ad esempio: se t_A è il tempo impiegato da Ahmed, il tempo di Elise è $t_E = t_A + 20$
Si sa che. $v_A = 2v_E$ da cui $v_A t_A = v_E t_E$ $2v_E t_A = v_E t_A + v_E 20$
$t_A = 20$ minuti

Il tempo totale è, pertanto, di **150 minuti**, cioè di **2 h 30 minuti**.

Esercizio n. 7 (7 punti) **Smart box**



Applicando il teorema di Pitagora si ricava che $a = \sqrt{40}$.
Il volume della scatola è $a^3 \approx$ **253 cm^3**

Esercizio n. 8 (5 punti) **La bella fuga**

Quando il primo corridore arriva in cima, il secondo dista 200 m e per percorrerli impiegherà 200m / (18km/h) = 40s.
Per la discesa il primo corridore ha un vantaggio di 40s. Dato che i due corridori dopo il passaggio della cima, impiegano lo stesso tempo e percorrono la stessa distanza per raggiungere la velocità costante di 70km/h, la distanza tra di loro è:

$$70 \times \frac{40}{3600}\ km \approx 0{,}778\ km = 778\ m$$

Esercizio n. 9 (7 punti) **Localizzazione satellitare**

Si sa che il raggio terrestre misura 6 367 km ; si determina l'angolo α corrispondente all'arco di 0,1 km.

$0{,}1 = \frac{2\pi r}{360} \times \alpha$ da cui $\alpha \approx 0{,}0009°$. Il GPS indica una latitudine Nord di 48,7281° – 0,0009° = **48,7272°**.

Esercizio n. 10 (10 punti) **Teoria delle corde**

Poligono	L segmento con origine A	L lato	Prodotto

quadrato	un segmento di l = 2	2 lati di l= $\sqrt{2}$	4
esagono	un segmento di l = 2 2 segmenti di l = $\sqrt{3}$	2 lati di l = 1	6
triangolo equilatero		2 lati di l = $\sqrt{3}$	3

Congettura: **per un poligono regolare di *n* lati inscritto in una circonferenza di raggio 1, il prodotto delle lunghezze dei segmenti congiungenti un vertice con gli altri misura *n*.**
Secondo tale congettura il valore del prodotto relativo a un poligono regolare di 1 000 lati sarà **1 000**.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) La bolla nella bolla

Il raggio iniziale della prima sfera misura 6 cm, quello finale 7 cm.
Secondo l'enunciato si ha la seguente relazione : $V_7 = V_R + V_6$ da cui si deduce che
$R^3 = 7^3 - 6^3$ $R^3 = 127\ cm^3$ R **≈ 5,03 cm**

Il diametro della bolla interna dovrebbe misurare, quindi, circa 10 cm.

Esercizio n. 12 (7 punti) Area di sosta

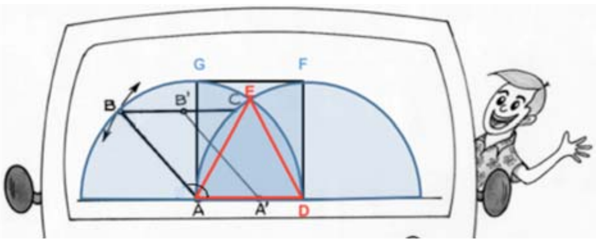
Ogni esagono è composto di 6 triangoli equilateri uguali alle facce triangolari.
Si suppone che la discontinuità della superficie di probabile impatto non influenzi la probabilità (ipotesi di approssimazione).

La probabilità che la mosca si posi su una faccia esagonale risulta: $\dfrac{4\times 6}{4\times 6+4}=\dfrac{24}{28}$

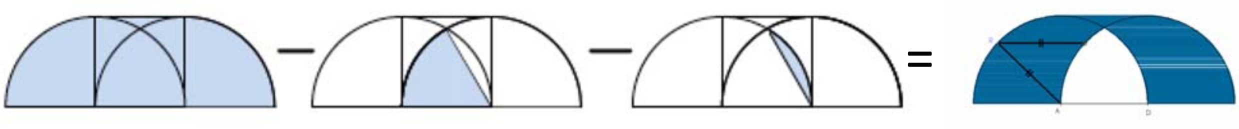
P = $\mathbf{\dfrac{6}{7}}$.

Esercizio n. 13 (10 punti) Si pulisce tutto?

Il quadrilatero ADFG è un quadrato di 0,7m di lato. Il triangolo ADE è equilatero.



Il disegno seguente illustra il calcolo dell'area della parte ripulita:



(Notate che il disegno riportato non è nella scala richiesta)

$$0{,}5\ \times \pi \times 0{,}7^2 + 0{,}7^2 - \frac{1}{6} \times \pi \times 0{,}7^2 - \left(\frac{1}{6}\pi \times 0{,}7^2 - \frac{0{,}7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0{,}7}{2} \right) = \mathbf{0,7^2} \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \mathbf{1} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}} \right) \approx \mathbf{0,9587}$$

L'approssimazione accettata è 0, 96.
Il costruttore, pertanto, non terrà in considerazione la proposta poiché la parte del parabrezza non ripulita è una grande parte nel centro del parabrezza.