Matematica Senza Frontiere

Competizione 6 marzo 2012

Proposta di soluzioni

Esercizio 1 (7 punti) Senza dubbio

Un anno è composto da 365 o 366 giorni per cui al massimo ci possono essere 366 ricorrenze di compleanno diverse; ma, se nel paese di Nicole ci sono più di 400 abitanti, sicuramente due persone compiono gli anni lo stesso giorno.
Con 4 cifre si hanno 10^4 possibilità per comporre un codice PIN.

Per 10 milioni di telefoni ci sono almeno $\frac{10^7}{10^4} = 10^3$ proprietari che utilizzano lo stesso codice per il loro telefono.

Poiché sono più di 366, tra di loro sicuramente almeno due festeggiano il compleanno lo stesso giorno.

Esercizio 2 (5 punti) In tutti i sensi

Il più grande numero a 5 cifre è 99 999. La calcolatrice dà $\sqrt{99\,999} \approx 316{,}22\ldots$

Questo limita la ricerca ai palindromi a 3 cifre inferiori a 316.
Si calcola 313^2, 303^2, 292^2 ecc., che non sono dei palindromi, fino ad arrivare alla soluzione: $\boxed{\mathbf{212^2 = 44\,944}}$.

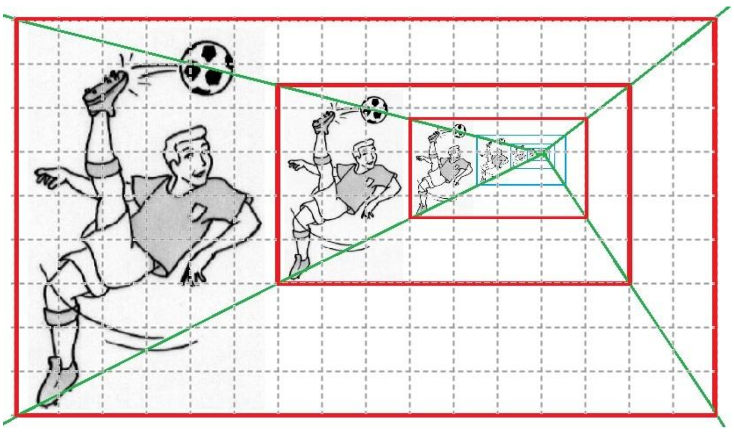
Esercizio 3 (7 punti) Pesiamo

I valori delle masse sono **1**, **3** e **9** :

1=1 2=3-1 3=3 4=3+1 5=9-3-1 6=9-3 7=9-3+1 8=9-1 9=9 10=9+1
11=9+3-1 12=9+3 13=9+3+1

Generalizzando, se si vuol superare il 13, l'insieme ottimale delle masse è composto da potenze del 3.
Per saperne di più, approfondire l'argomento "sistema ternario bilanciato".

Esercizio 4 (5 punti) Incrocio dei pali!

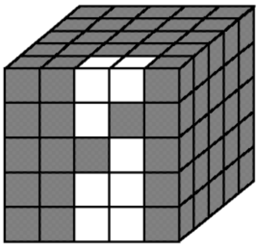


Il rapporto di riduzione è 1/2.

Sono richiesti solo i primi tre rettangoli.

Se le posizioni relative sono corrette le congiungenti i vertici concorrono in un punto.

Esercizio 5 (7 punti) “Ripieno” di cubi



Ecco il cubo dopo che è stato tagliato uno strato su tutte le sue facce:

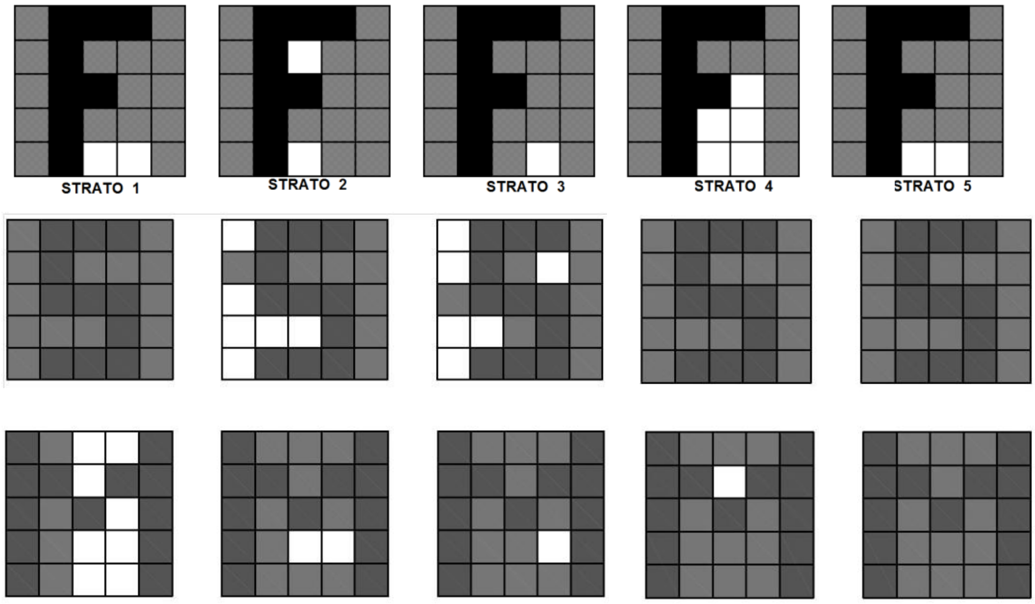
I cubi bianchi in tutto sono **12**.

si possono contare i cubi bianchi per ogni strato:

dall’alto (F)

o dal lato (S)

o di fronte (M)



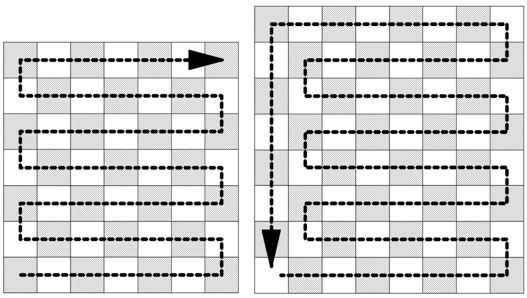
N.B. Come giustificazione si accetta una rappresentazione degli strati o una enunciazione chiara del ragionamento effettuato.

Esercizio 6 (5 punti) Risparmiamo!

Dal grafico n°2 si ricava l’area minima per un raggio compreso tra 3,1 e 3,2.
Si riporta questo intervallo di valori sull’altro grafico per ricavare la misura dell’altezza corrispondente del cilindro e si legge, quindi, circa **8 cm**.

Le dimensioni dell’etichetta sono circa: **h = 8 cm b compresa nell’intervallo tra 19,5 cm e 20,1 cm** (la lunghezza è $2\pi R$).

Esercizio 7 (7 punti) Andata e ritorno



Ecco un esempio di un percorso non corretto per una scacchiera 7x7 e di uno esatto per una scacchiera 8x8.

Si deduce che il percorso è tracciabile solo se il numero delle caselle della scacchiera è pari.

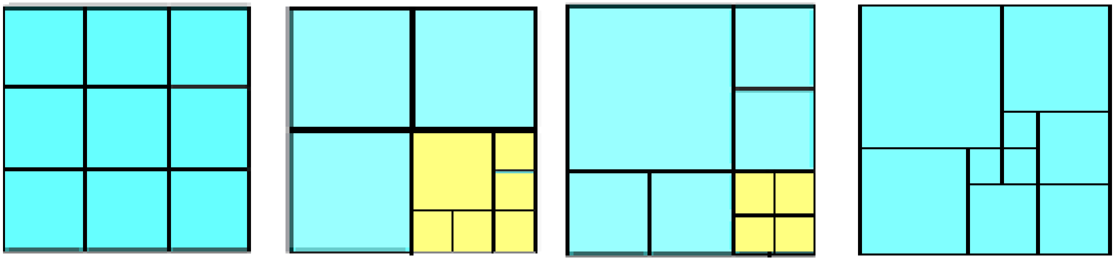
Dimostrazione dell’impossibilità per numero dispari di caselle

Il numero di passi da fare è il numero delle caselle della scacchiera. Ad ogni passo si cambia di colore: se si effettua un numero dispari di passi, non ci si può trovare su una casella del colore di quella di partenza. E’ impossibile, pertanto, ritornare a quella di partenza.

Oppure: per ritornare in **a1** bisogna fare tanti passi verso sinistra quanti quelli verso destra e tanti verso il basso quanti verso l’alto. Si ha dunque un numero pari di passi. Se il numero delle caselle è dispari non è possibile attraversarle tutte.

Esercizio 8 (5 punti) Quattro per nove

Ecco quattro soluzioni:

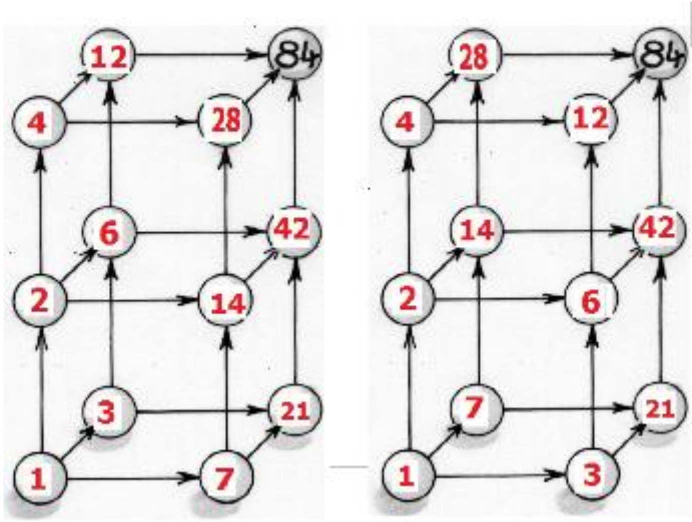


La partizione di un quadrato in quadrati è oggetto di ricerche dal XX al XXI secolo; vedasi http://www.squaring.net/

Esercizio 9 (7 punti) Percorso "frecciato"

Il numero 84 ha esattamente 12 divisori.
Si tratta di inserirli sulle 12 palle.

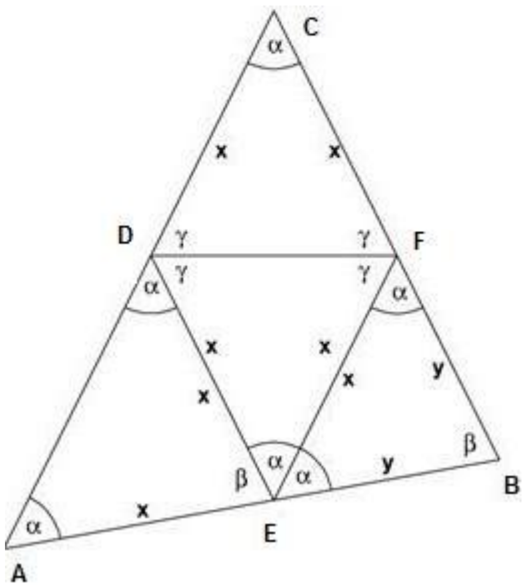
Ci sono due soluzioni simmetriche:



Queste disposizioni risultano dalla scrittura di 84 scomposto in fattori primi: $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Esercizio 10 (10 punti) Quattro per uno

Ecco il puzzle:



Nel triangolo ADE si ha $\beta = 180° - 2\alpha$, l'angolo AEB misura quindi 180° e allora i punti A, E, B sono allineati.

Nel triangolo CDF si ha $\alpha = 180° - 2\gamma$, gli angoli ADC e BFC misurano quindi 180° e allora i punti A, D, C e C, F, B sono allineati.

Inoltre il triangolo ABC è isoscele avendo due angoli uguali (α) e due lati uguali ($x+y$).

Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti) E' importante contare i chiodi?

Siano n il numero totale d'intervalli (o di chiodi) e p il numero d'intervalli nel settore bianco. Si ha:

$$\frac{p+1}{n} = \frac{1}{3} \qquad \frac{p-1}{n} = \frac{3}{10}$$

da cui si deduce che $p = 19$ e $n = 60$. Per cui P(Nero) = $1 - \frac{3}{10} - \frac{19}{60} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{20}}$

Altre possibili soluzioni:

A)

Considerando P proporzionale al numero di chiodi per ogni colore:

P(blu) = 3/10 = 9/30 = 18/60
P(rosso) = 1/3 = 10/30 = 20/60 quindi P(bianco) = 19/60

da cui, per complemento a 1, si ha: **P(nero) =** 1 - 1/3 - 3/10 - 19/60 **= 1/20**

B)

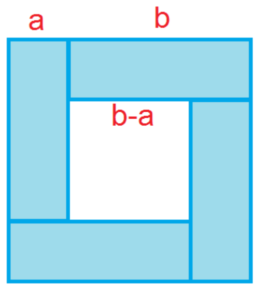
P(rosso) = 1/3 $\Rightarrow$ il settore rosso ha un angolo al centro di 360°/ 3 = 120°
P(blu) = 3/10 $\Rightarrow$ il settore blu ha un angolo al centro di 360° x (3/10) = 108°

quindi il settore bianco ha un angolo al centro di (120° + 108°) / 2 = 114°.

Il settore nero ha un angolo al centro di: 360° - 120° - 108° - 114° = 18°

Si deduce che: **P(nero)** = 18°/360° = **1/20**

Esercizio 12 (7 punti) "Pezzi di fisarmonica"



Chiamiamo a e b la larghezza e la lunghezza dei rettangoli assemblati. Allora il quadrato grande ha lato a+b mentre il piccolo ha lato b-a. Il rapporto delle aree è 4:

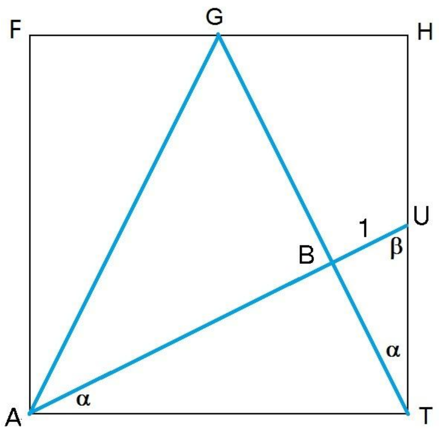
$(a+b)^2 = 4(b-a)^2$

e, quindi, il rapporto tra i lati è 2: a+b = 2(b-a).

Si deduce che b=3a e che le dimensioni del foglio che è stato piegato a fisarmonica sono **4a** e **3a**.

(potrebbero essere anche 12a e a, ma la figura suggerisce la prima soluzione)

Esercizio 13 (10 punti) Di tratto in tratto



Ci sono più percorsi di risoluzione; ad esempio, con l'aiuto degli angoli.

I triangoli TAU, HTG e FAG sono congruenti, quindi gli angoli TAU e GTH sono uguali.

Considerando α e β complementari possiamo dedurre che il triangolo BUT è rettangolo in B. Si ha:

$$\tan(\alpha) = \boxed{\frac{UT}{AT}} = \boxed{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{BU}{TB}} = \boxed{\frac{TB}{AB}}$$

da cui

BT = 2 cm e AB = 4 cm
AU = GT = AG = 5 cm

La lunghezza totale è 15 cm.

Si può anche risolvere ricorrendo a considerazioni su figure simili e all'uso del teorema di Pitagora.