

Matematica Senza Frontiere

Elementi di soluzioni per la Competizione del 22 marzo 2011

Esercizio 1 (7 punti) Appuntamento da Khan

Uno dei due protagonisti, per esempio Marco, calza i pattini alla partenza, percorre inizialmente diversi chilometri e assume vantaggio sul suo amico.

Marco non guadagnerà del tempo se si ferma ad aspettare il suo amico o se torna per lo scambio dei pattini. Li depositerà, invece, e continuerà a piedi. Polo li calzerà quando li troverà e andrà a raggiungere Marco. Con questa strategia, diverse soluzioni sono teoricamente equivalenti, ma se si vuole ridurre al minimo il tempo perso per mettere e togliere le calzature, Marco depositerà i pattini a metà della corsa. Così, ognuno farà 10 km a piedi e 10 km con i pattini.

Marco e Polo arriveranno simultaneamente da Khan dopo 2^h30^{minuti} (e alcuni secondi!).

Esercizio 2 (5 punti) Chi più sa, meno fatica

Il minimo è: $1 \times 2 + 1 \times 4 + 5 + 7 = 18$; il massimo è: $(1 + 1) \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 = 560$.

Ognuno di questi punteggi può essere ottenuto in altro modo.

Esercizio 3 (7 punti) Rompicapo

Sono possibili diverse strategie.

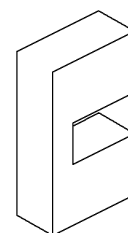
Si può, ad esempio, prendere la prima mattonella "orizzontale", calcolare il suo volume ($2 \times 8 \times 10 = 180 \text{ cm}^3$), aggiungere, quindi, le due parti verticali della piastrella di 10 cm di altezza, in eccesso (cioè 2 volte $2 \times 4 \times 8$ o 2 volte 64 cioè 128 cm^3).

Si aggiungono, infine, i due pezzi di blocco verticale di 8 cm di altezza, un po' più complicato, come indicato nel disegno.

(2 pezzi da $2 \times 4 \times 8$ con un pezzo mancante di $2 \times 3 \times 2$

o 2 volte $(64 - 12)$ o 2 volte 52 è cioè 104 cm^3).

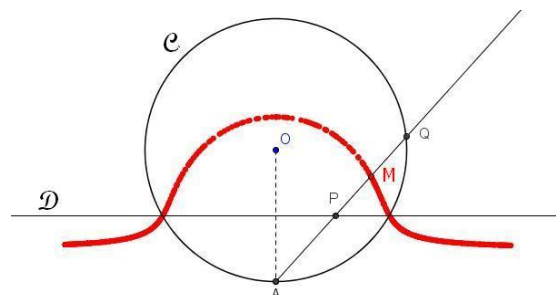
Si perviene così ad un volume totale di $180 + 128 + 104 = 392 \text{ cm}^3$.



Esercizio 4 (5 punti) Lieto evento

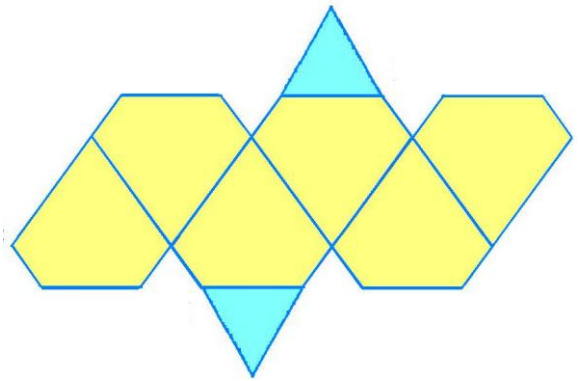
Ecco la curva "mediana" del cerchio e la retta:

Si riconosce il comportamento asintotico da entrambe le parti.



Esercizio 5 (7 punti) Poliedro di Dürer

Ci sono diversi modelli possibili.
Eccone uno compatto:

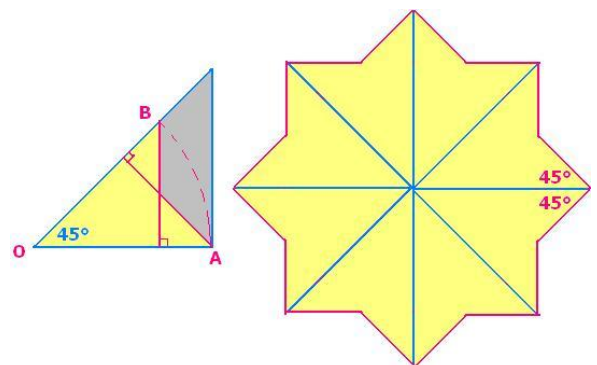


Occorre porre attenzione che i triangoli siano equilateri.

Esercizio 6 (5 punti) Zellij

La figura a sinistra mostra il foglio di carta piegato; in grigio scuro il trapezio da tagliare.

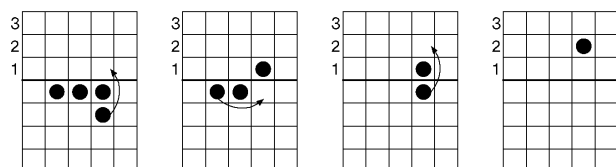
Dopo 3 piegature, l'angolo è di 45° . I triangoli rettangoli di ipotenusa OA e OB hanno un angolo di 45° e, quindi, anche l'altro angolo acuto misura 45° .



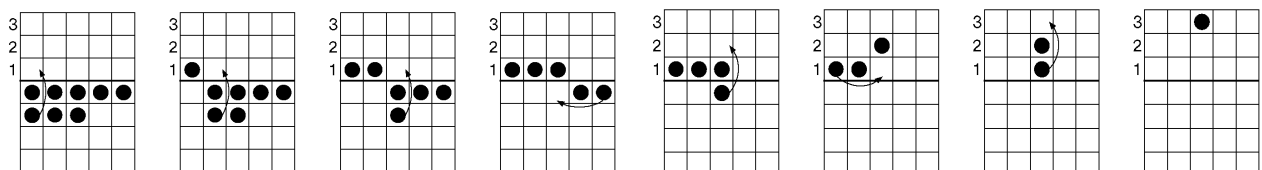
Quando la figura di carta è aperta, ogni angolo è ripetuto per simmetria cosicché risulta che ha otto angoli di 90° .

Esercizio 7 (7 punti) Salto alla terza fila

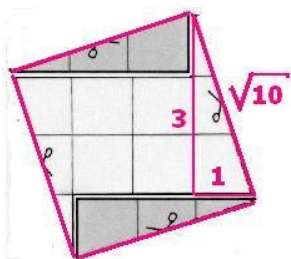
Ecco una sequenza di movimenti che permette di raggiungere la seconda fila:



Per raggiungere la terza fila, occorrono almeno 8 pedine.
Ecco una soluzione tra le possibili:

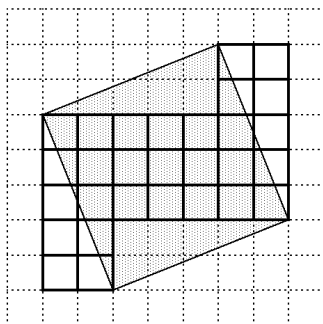


Esercizio 8 (5 punti) Tagli al quadrato



Composto da 10 quadratini di lato unitario, il quadrato ha area di 10 cm^2 per cui il suo lato misura $\sqrt{10} \text{ cm}$.

Questo spiega il taglio diagonale di 3 quadratini: applicando il teorema di Pitagora si ottiene: $(3^2 + 1^2) \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$.



Si può, quindi, immaginare la partizione di un assemblaggio di 29 quadratini, presentato a lato, dopo aver notato che $29 = 2^2 + 5^2$.

Così, il taglio in diagonale dà segmenti di lunghezza $\sqrt{29} \text{ cm}$.

Esercizio 9 (7 punti) Dopo il 2010?

Si iniziano a calcolare i primi termini e si osserva che:

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)
2010	5	$5^2 = 25$	$2^2 + 5^2 = 29$	$2^2 + 9^2 = 85$	$8^2 + 5^2 = 89$	$8^2 + 9^2 = 145$	$1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$	$4^2 + 2^2 = 20$	$2^2 + 0^2 = 4$	$4^2 = 16$	$1^2 + 6^2 = 37$	$3^2 + 7^2 = 58$	$5^2 + 8^2 = 89$	...

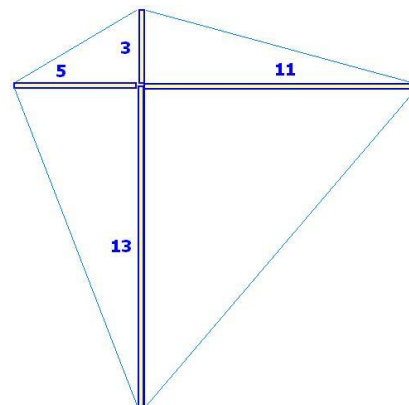
Si osserva che il 14^{mo} numero è lo stesso del sesto. Siccome la regola rimane la stessa, si sa che i numeri 22^{mo}, 30^{mo} e 38^{mo} sono 89. Dalla colonna 6, la sequenza si ripete con periodo di 8, quindi l'8^{vo}, il 2000^{mo} e il 2008^{mo} danno 42 come tutti quelli delle colonne di posizione multipla di 8. E il numero 2011^{mo} è 16 dato che $2011 = 2008 + 3$.

Esercizio 10 (10 punti) Con quattro spaghetti

In ogni triangolo, l'altezza tracciata da un vertice è minore o uguale ad ognuno dei lati adiacenti al vertice (distanza da un punto ad una retta). Così, con due spaghetti aventi un vertice comune, l'area massima si ottiene con la disposizione ad angolo retto.

Dato che si hanno 4 spaghetti, si può disporli in modo da formare 4 triangoli rettangoli. I quattro spaghetti, allora, costituiscono, a due a due, le diagonali di un quadrilatero la cui superficie è la metà del prodotto delle diagonali.

Resta da vedere quale disposizione per questo prodotto sia massima. Si osserva che $(5 + 11) \times (3 + 13)$ dà il più grande prodotto, da qui deriva la scelta della disposizione in figura.



Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti) Ben legato

Sia x il lato della base quadrata del pacchetto. Sia y la sua altezza. Queste due dimensioni sono espresse in centimetri.

Il problema può essere risolto ricorrendo al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 4x + 4y - 10 = 150 \\ 6x + 2y + 30 = 150 \end{cases}$$

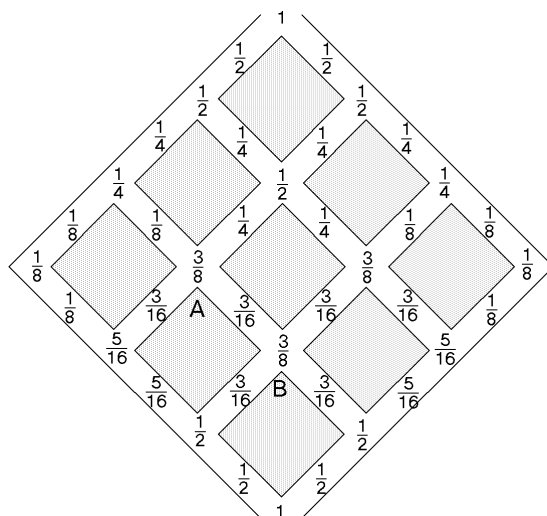
Si ottiene: $x = 10$ e $y = 30$.

Il volume del pacchetto è: $V = 10 \times 10 \times 30 = 3\,000 \text{ cm}^3$.

Esercizio 12 (7 punti) Rotola sempre

Ecco i percorsi di rete diversi che la pallina può prendere con la probabilità di passaggio su ogni tratto e ad ogni incrocio.

Si noti che la probabilità che la palla passi per A è uguale a $3/8$ e la probabilità che la palla passi per B è ancora uguale a $3/8$.



Esercizio 13 (10 punti) TGV d'Alberto

5 minuti = $(1/12)$ h e 6 minuti = $(1/10)$ h

Quando i due treni si incontrano, il treno successivo che Alberto incrocerà si trova a una distanza d pari alla somma di:

la distanza che il treno di Alberto percorrerà fino all'incrocio successivo

e la distanza che l'altro treno percorrerà nello stesso tempo.

Questa distanza d è anche la distanza tra due treni che Alberto incontra e non cambia dopo il rallentamento del treno di Alberto.

Quando i treni viaggiano a 300 km/h in entrambe le direzioni, i treni che seguono distano l'uno dall'altro di:

$$d = 300 \times (1/12) + 300 \times (1/12) \quad d = 50 \text{ km.}$$

Dopo il rallentamento del treno di Alberto e chiamando v la sua nuova velocità, si ha:

$$d = 300 \times (1/10) + v \times (1/10) \quad \text{quindi} \quad 300 \times (1/10) + v \times (1/10) = 50$$

Si ottiene $v = 200 \text{ km/h}$