Mathématiques sans Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

Elementi di soluzione per la Competizione del 4 marzo 2010

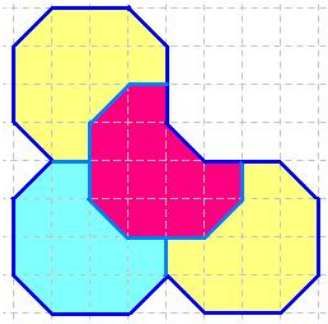
<u>Esercizio n. 1 – Matemagia</u> (7 punti)

Il mago ovviamente gira il gettone che aveva seguito con gli occhi**:**

- se questo gettone è del colore di quello che precedentemente era nel mezzo, questo non ha subito scambio, quindi è quello scelto dallo spettatore
- se questo gettone è di un altro colore**,** allora è quello che è stato scambiato con quello centrale. Perciò il gettone scelto dallo spettatore è del terzo colore.

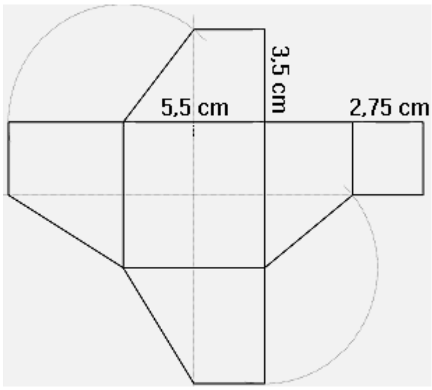
<u>Esercizio 2 – Ognuno al suo posto</u> (5 punti)

Ecco la partizione richiesta:



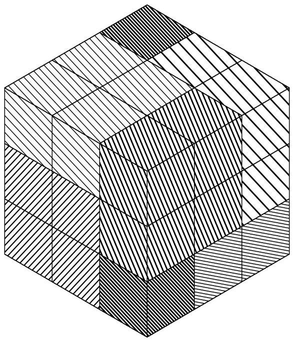
<u>Esercizio n. 3 – La pietra d'angolo</u> (7 punti)

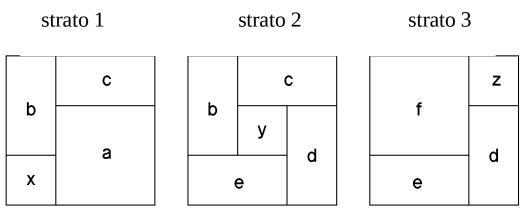
La pietra alla sommità della piramide è a sua volta una piccola piramide simile alla grande, in scala 1 : 200.
Nello strato sottostante, la sezione della piramide è un quadrato di lato doppio, cioè di 220 cm. Il penultimo strato è quindi costituito da 4 pietre angolari congiunte.
Così, la base superiore di ogni pietra d'angolo risulta un quadrato di lato 55 cm.
Ecco un possibile sviluppo: le 3 lunghezze segnate in figura sono sufficienti per individuarlo. Le altre possono essere riportate col compasso.



<u>Esercizio n. 4 – 3D</u> (5 punti)

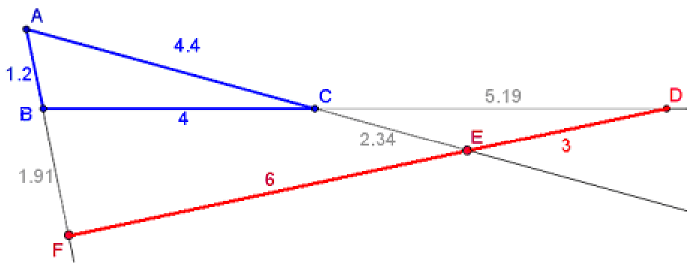
Ecco la soluzione e la rappresentazione delle sezioni ad ogni strato
Le 6 facce della composizione presentano lo stesso disegno opportunamente ruotato.
I cubi piccoli x, y, *z* sono disposti su una diagonale.
NB: le sezioni non sono richieste





<u>Esercizio n. 5 – Attenti alla rotta!</u> (7 punti)

Fra le 7 e le 7:05 la petroliera percorre 3 km, poi 6 km nei 10 minuti successivi.
Si tratta di tracciare la carta disegnata a fianco in scala 1:50 000.
Si prolungano i lati del triangolo, poi ci si aiuta con una riga graduata per individuare nel modo più preciso 3 punti D, E, F allineati in modo che DE = 3 cm e EF = 6 cm.

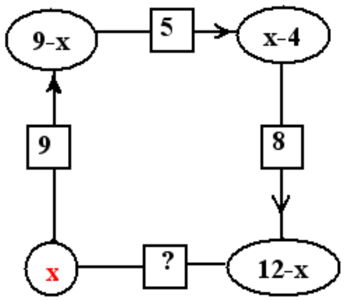


(Calcoli trigonometrici, qui non richiesti,
mostrano che la soluzione è unica e che: CD ≈ 5,19 ; CE ≈ 2,34 e BF ≈ 1,91 *con approssimazione* 0,01*)*

Esercizio n. 6 – Il colore dei numeri (5 punti)

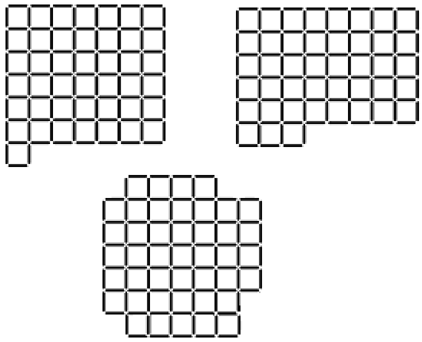
1 è rosso. **1 < 2**, quindi 2 è rosso. 2+1 = 3, quindi 3 è blu.
2+1 < 4, la somma di tutti rossi minori di 4 è minore di 4 quindi 4 è rosso.
4+1 = 5, 5 è blu. 4+2 = 6, 6 è blu. 4+2+1 = 7, 7 è blu.
4+2+1 < 8, la somma di tutti i rossi minori di 8 è minore di 8 quindi 8 è rosso, etc.
Così saranno rosse tutte le potenze intere di 2 e blu tutti gli altri interi.
(si riconosce la numerazione binaria : ad esempio 10 = 8+2 = 1010_2)
I rossi minori di 50 sono: 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32.

Esercizio n. 7 – Davvero impossibile (7 punti)



Sia x il numero inserito nel disco in basso a sinistra.
Allora, seguendo le frecce, si ottiene la figura a lato.
La somma dei due dischi della linea in basso vale 12, perciò il quadrato compreso fra i dischi **deve contenere necessariamente il 12**.
I numeri nei dischi sono interi naturali, quindi si otterrà una soluzione per tutti i valori interi compresi fra 4 e 9. **Ci sono pertanto 6 possibilità.**

Esercizio n. 8 – Quadrati di fiammiferi (5 punti)



Intuitivamente si osserva che sono migliori le disposizioni compatte più vicine al quadrato.
La dimostrazione, difficile, non è qui richiesta.

Con 100 fiammiferi si può realizzare un assemblaggio, al massimo, di 43 quadrati. A fianco ci sono tre esempi.

Esercizio n. 9 – Lavoro in nero (7 punti)

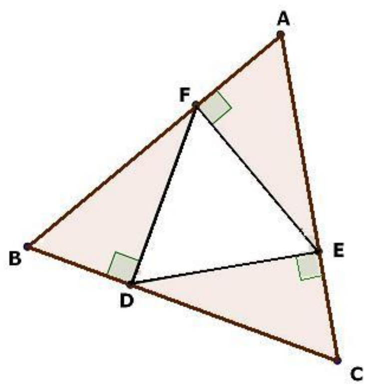
Bisogna considerare il peggiore dei casi: **Goffredo deve prendere 27 oggetti**.
26 non bastano: Goffredo potrebbe infatti avere 20 calzini e 6 guanti sinistri.
Con 27 oggetti avrà almeno 7 guanti, quindi almeno un paio completo; inoltre avrà almeno 15 calzini, quindi parecchie paia coordinate.

Esercizio n. 10 – La passeggiata della coccinella (10 punti)

Se si indica con x la distanza DC, si avrà CE = $\frac{x}{2}$, poi AE = $12-\frac{x}{2}$ e così di seguito.

D = G porta all'equazione: $$\frac{12-\frac{12-\frac{x}{2}}{2}}{2} = 12 - x$$

la cui soluzione è: ***x* = 8.**
Il punto D si trova quindi a un terzo di BC a partire da B.



Altra soluzione senza equazione:
I triangoli CDE, EAF e FBD sono rettangoli e hanno angoli di 30° e 60°.
Con 3 angoli di 60°, il triangolo DEF è equilatero.
I triangoli CDE, EAF e FBD sono congruenti e i cateti minori sono metà delle ipotenuse.
Quindi il punto D divide il lato BC in due parti l'una doppia dell'altra. Ci sono quindi due soluzioni diverse ma equivalenti: una con BD = 2 DC e l'altra con DC = 2 BD.

Speciale terze

<u>Esercizio 11 – Sala modulare</u> (5 punti)

Sia *a* il numero delle poltrone in una fila.
Sia *b* il numero delle file.
Il problema conduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} ab = (a+4)(b-1) \\ ab = (a-11)(b+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+4b=4 \\ 4a-11b=44 \end{cases}$$

La soluzione è: $a = 44$ e $b = 12$.
La configurazione iniziale presenta 12 file di 44 poltrone.
I posti nella sala pertanto sono 528.

<u>Esercizio 12 – Sfida a dadi</u> (7 punti)

Se si individuano le possibilità con l'aiuto di una tabella 3 x 3, si arriva a concludere che **la probabilità che Antonio vinca su Bernardo è 4/9.**
Se ci si limita a usare numeri interi, i soli dadi che rispondano alle richieste di Cloe sono:

C_1: 1, 6, 9
C_2: 1, 7, 9.

Sia con C_1 sia con C_2, Cloe ha 4 possibilità su 9 di vincere su Antonio e 5 possibilità su 9 di vincere su Bernardo.

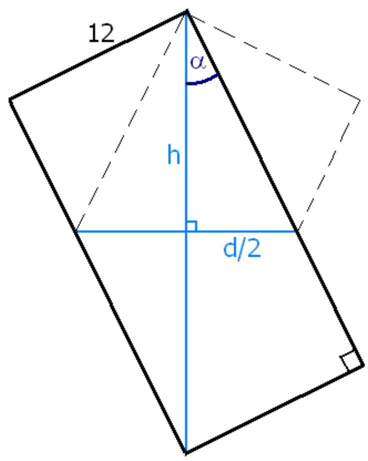
B \ A	2	4	10
3	B	A	A
5	B	B	A
8	B	B	A

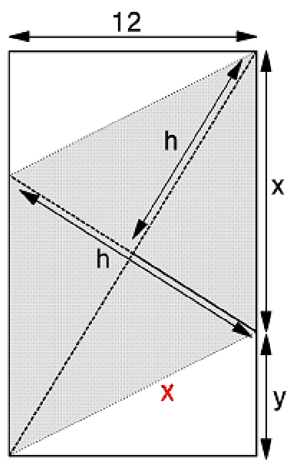
<u>Esercizio 13 – Cappello cinese</u> (10 punti)

Laura ha piegato il foglio rettangolare facendo coincidere due vertici opposti.
Se si apre il foglio, si ha la figura qui accanto:

h = d se e soltanto se **tg α =** $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Si deduce che la lunghezza del foglio è 24 cm.
Questa risoluzione trigonometrica è la più rapida.





Ci sono altri modi di risolvere il problema; ad esempio:

Sul foglio aperto, l'area del parallelogramma grigio (rombo) può scriversi h^2 *ma anche* 12x.
Per il teorema di Pitagora, nel cappello si ha:

$h^2 + \frac{h^2}{4} = x^2$, $\Rightarrow 12x + \frac{12x}{4} = x^2$, *da cui* $15x = x^2$, $\Rightarrow x = 15$.

e nel triangolo bianco si ha:

$y^2 = 15^2 - 12^2$, $\Rightarrow$ $y = 9$,

da cui risulta che la lunghezza del rettangolo è 24 cm.