Matematica Senza Frontiere

Elementi di soluzione per la prova 10 febbraio 2009

- Usare solo un foglio risposta per esercizio.
- Sono richieste spiegazioni o giustificazioni per gli esercizi 1, 9, 10, 12 e 13.
- Saranno esaminate tutte le risposte, anche se parziali.
- Si terrà conto dell'accuratezza della soluzione.

Esercizio 1 (7 punti) A ritmo di crociera

Sia *n* il numero dei giorni di vacanza ➔ il libro è fatto da 30*n* pagine. La metà del libro è costituita da 15n pagine. Se Piero legge 15 pagine al giorno fino alla metà del libro gli occorreranno *n* giorni per questa metà e le sue vacanze saranno finite!

In compenso, se leggesse 15 pagine al giorno durante la ***prima metà delle sue vacanze*** *e 45 pagine al giorno durante la seconda metà, arriverebbe a finire il suo libro.* (Questa osservazione non è richiesta agli alunni).

Esercizio 2 (5 punti) Gatto corridore

(7+7)x7x7+7+7=700

Il gatto con gli stivali va da Monza a Kazan in 2 salti semplici, seguiti da due supersalti e 2 salti semplici per finire.

Non ci si aspetta che gli allievi dimostrino che è la soluzione ottimale. Si ha $700=2x7^3+2x7$

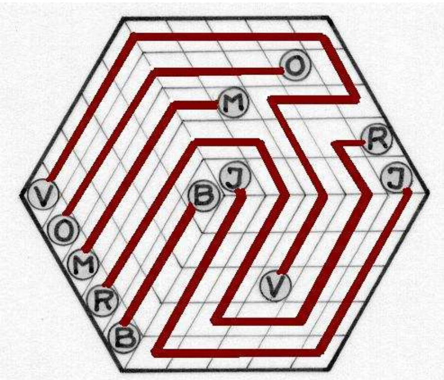
Esercizio 3 (7 punti) Griglia di addizioni

2	7	1	3	13
3	8	7	9	27
1	9	3	8	21
6	24	11	20	

2	7	1	3	13
3	9	7	8	27
1	8	3	9	21
6	24	11	20	

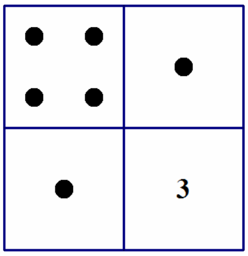
La somma 6 della prima colonna impone il contenuto 1, 2, 3.
Il totale 27 della seconda riga fissa la posizione del 3 e impone il contenuto complementare con 7, 8, 9. Nello stesso tempo il totale della seconda colonna impone il contenuto 7, 8, 9 e la somma della prima riga fissa la posizione del 7.
Dalle altre condizioni poi rimangono non vincolate solo le posizioni del 9 e dell'8 nella II e nella IV colonna e quindi consegue che sono possibili solo le due soluzioni riportate.

Esercizio 4 (5 punti)   Interconnessioni



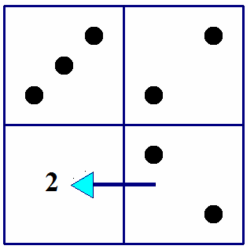
Esercizio 5   (7 punti)   Cubo di cubi

La faccia dietro è determinata,
il “3” non è orientato.



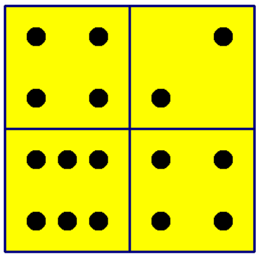
<u>1° caso</u>

Faccia laterale sinistra



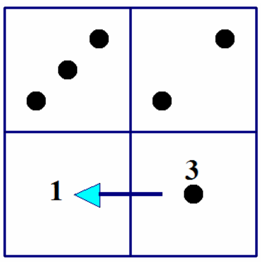
Questa faccia è un “2”, quindi
anche l’adiacente è un “2” .

Faccia sotto



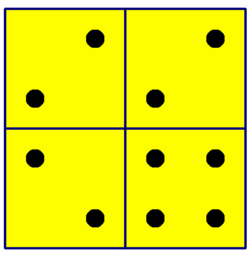
<u>2° caso</u>

Faccia laterale sinistra



Questa faccia è un “3”, quindi
l’adiacente è un “1” .

Faccia sotto



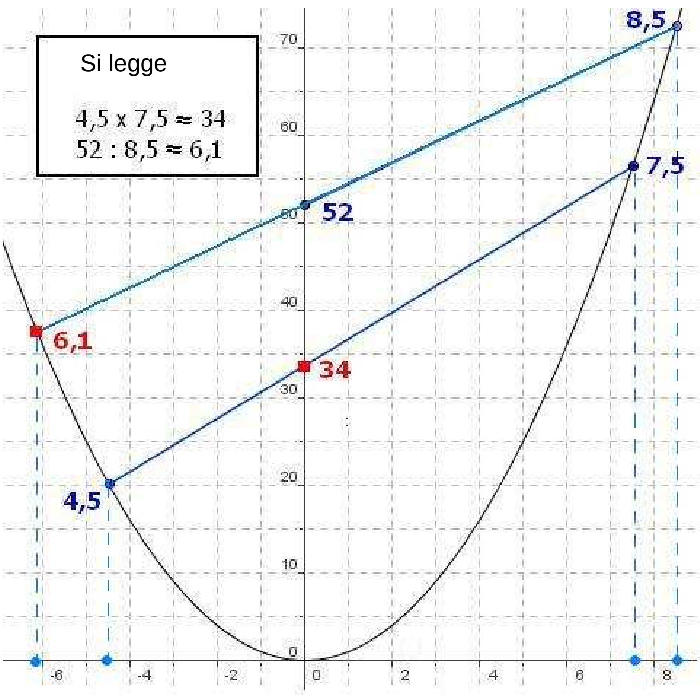
Esercizio 6 (5 punti) Già 20 anni!!

Si può passare da 1989 a 2009 in 5 tappe.

Per esempio:

1 989 ; 1 089 ; 1 189 ; 2 189 ; 2 109 ; 2 009

Esercizio 7 (7 punti) Moltiplicazione parabolica



Infatti siano *a* e *b* in valore assoluto, i due fattori della moltiplicazione e *t* l'ordinata del punto in cui la retta per i punti $(-a, a^2)$ (b, b^2) incontra l'asse delle ordinate

Considerando le rette $y=a^2$, $y=b^2$, $x=-a$, $x=b$ e i triangoli simili che così si formano si ha:

$$\frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{t-a^2}{|a|}$$

$$|a|(b+a) = t - a^2$$

$$ab = t$$

Per la divisione basta ricordare che è l'inversa della moltiplicazione.

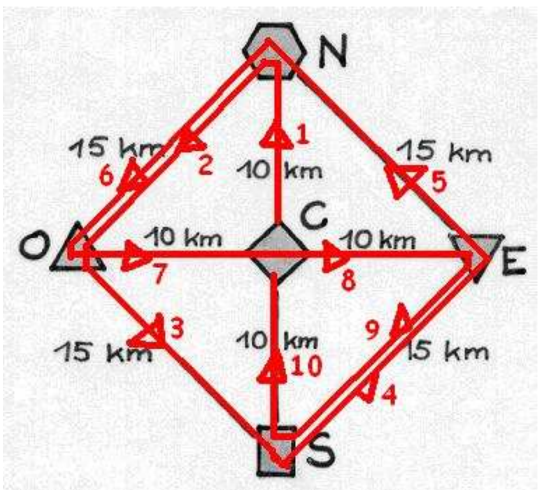
Oppure:

Sia y=mx+p l'equazione di una retta che taglia la parabola. Dall' intersezione retta parabola si ha l'equazione

$x^2 = mx+p$ ➔ $x^2-mx-p=0$.

Per le relazioni soluzioni-coefficienti ➔ p è l'opposto del prodotto delle soluzioni.

Esercizio 8 (5 punti) Minimo percorso



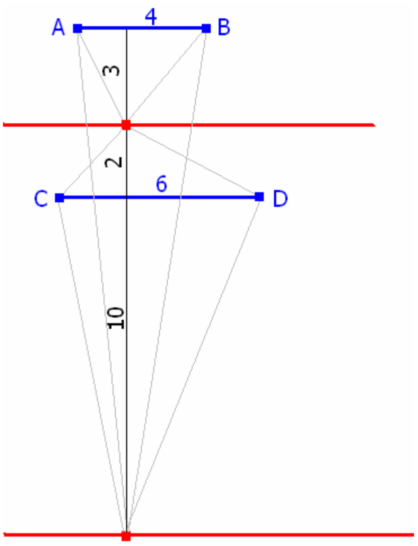
Ecco una soluzione possibile. La distanza minima è 130 Km

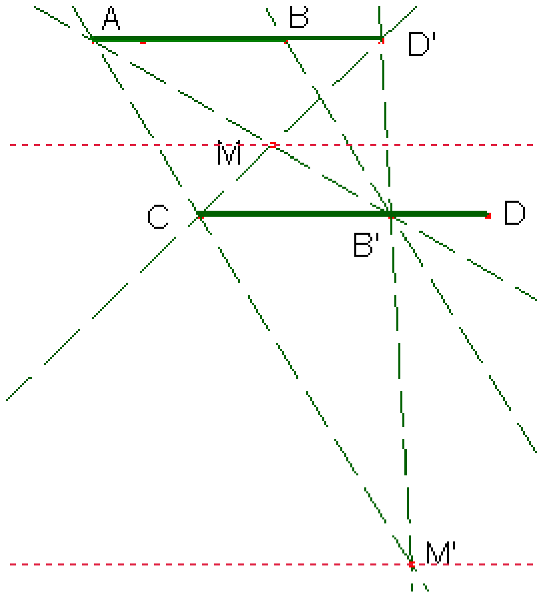
Si può provare che il percorso è quello minimo così:

N, E, S, O sono ognuno all'estremità di 3 strade, ma essendo punti di passaggio sono necessariamente anche alle estremità di un numero pari di cammini, dunque di almeno 4 cammini e quindi una delle strade che raggiunge ciascuna delle città N, E, S, O è percorsa due volte. La strada lato del quadrilatero "vale" sia per la città a un capo sia per quella dall'altra parte. Basta quindi percorrere due volte solo 2 lati. L'alternativa è percorrere 2 volte tutte e quattro le strade semidiagonali, ma il cammino è più lungo.

Non ci si attende questa spiegazione dagli allievi.

Esercizio 9 (7 punti) E' nell' "*area*"





L'insieme delle soluzioni è l'unione di due rette.
Detta h l'altezza del triangolo CMD, le posizioni di queste rette sono date dalle soluzioni delle equazioni
6h/2 = 4(5-h)/2 e 6h/2 = 4(5+h)/2
cioè **h=2 e h=10**

Oppure

Perché i due triangoli abbiano la stessa area le rispettive altezze devono essere inversamente proporzionali alle basi e l'insieme dei vertici M è il luogo delle due rette parallele alle basi e a distanza da esse individuata dalla precedente condizione. Tali rette possono essere individuate dalla costruzione nella figura a destra dove AD'=6cm e AB'=4cm.

Esercizio 10 (10 punti) Taglia-incolla

Siano n e x le dimensioni del rettangolo iniziale.
Ci sono n strisce di x cm e n-1 raccordi di 1 cm per 400 cm di lunghezza totale.
Risulta:

$nx - (n-1) = 400$ ➔ $n(x-1) = 399$

e quindi i seguenti casi:

n	$x-1$	x
1	399	400
3	133	134
7	57	58
19	**21**	**22**
21	**19**	**20**
57	7	8
133	3	4
399	1	2

Il limite del foglio A4 restringe il numero delle soluzioni a due

***n* = 19 *x* = 22** o

***n* = 21 *x* = 20**

Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti)   Tetraedro speciale

Siano M, N, P i punti medi dei lati del triangolo ABC.
Quando si sollevano le facce laterali del tetraedro, le proiezioni dei loro punti A, B, C sul piano di base descrivono rette rispettivamente perpendicolari agli assi di rotazione NP – MP – MN fino a ricongiungersi in H, punto proiezione del vertice S del tetraedro.
Sapendo che NP, MP e MN sono ciascuno paralleli a un lato del triangolo, le loro perpendicolari AH, BH, CH sono le altezze del triangolo ABC, dunque
H è l'ortocentro del triangolo ABC. *(la dimostrazione non è richiesta!)*

Esercizio 12 (7 punti)   Chiaro-scuro

La somma delle aree dei quadrati scuri è:
$AJ^2 + BK^2 + CL^2$.
Per il teorema di Pitagora si può anche esprimerla così:
$(MA^2 - MJ^2) + (MB^2 - MK^2) + (MC^2 - ML^2)$
o
$\boxed{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$

Analogamente la somma delle aree dei quadrati chiari è:
$AL^2+CK^2+BJ^2 = MA^2-ML^2+MC^2-MK^2+MB^2-MJ^2 = \boxed{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$

Queste due somme sono uguali.

Esercizio 13 (10 punti)   Buco quadrato

L'area del primo quadrato è 64 cm². Si taglia in 4 parti uguali. L'area del quadrato centrale della seconda figura è 16 cm² ➔il suo lato è 4 cm.

Si ha allora il sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$
la cui soluzione è x=6 e y=2 , che rappresenta il "buon taglio".