

Soluzioni della prova del 5 marzo 2002

Esercizio 1 : Alibi

Andrea è occupato con Bruce per 3 minuti, poi con Dimitri per 4 minuti, poi al telefono con Camilla per 5 minuti. Rimane dunque solo per $15 - (3 + 4 + 5) = 3$ minuti, quindi è innocente.

Bruce è occupato con Andrea per 3 minuti, poi con Dimitri per 3 minuti ; egli è dunque solo per $15 - (3 + 3) = 9$ minuti ma non si conosce la durata della sua e-mail.

Camilla è occupata fino alle 22 e 05 e, nei 10 minuti restanti, è al telefono con Andrea per 5 minuti; dunque è innocente.

Dimitri vede Andrea dopo Bruce cioè dopo le 22 e 03 e prima della telefonata che Andrea riceve da Camilla cioè prima delle 22 e 10 e Dimitri resta 4 minuti da Andrea. Egli arriva dunque da Andrea al più tardi alle 22 e 06, quindi non può aver commesso il crimine prima della sua visita a Andrea; egli lascia Andrea al più presto alle 22 e 07, non ha potuto commettere il crimine dopo la sua visita ad Andrea poiché successivamente vede Bruce per 3 minuti.

Per eliminazione, **il colpevole è dunque Bruce.**

Esercizio 2 : Un gran dilemma

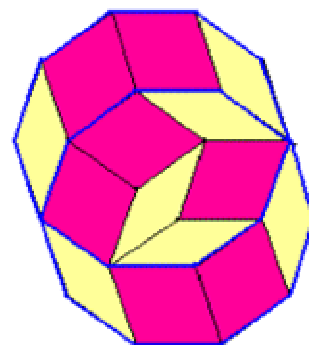
Una delle possibili strategie consiste nell'attivare i chiavistelli nell'ordine **1 – 2 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3.**

Esercizio 3 : Decagomania

Ci sono 6 modi per costruire un decagono con 5 losanghe di ogni tipo.

Ecco un esempio di due decagoni parzialmente sovrapposti.

Attenzione: i due decagoni possono essere sovrapposti anche tramite una sola losanga con angoli di 144° e 36° .



Esercizio 4 : All'incontrario

L'unica soluzione è:

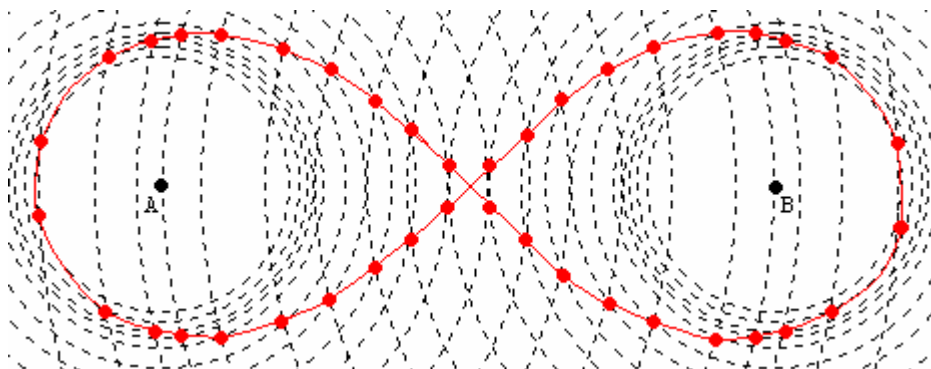
$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \\ \times \qquad \qquad 4 \\ \hline 8 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

Esercizio 5 : Voglia di volare

$60 \times 60 = 3600$; $72 \times 50 = 3600$; $90 \times 40 = 3600$; $100 \times 36 = 3600$; $144 \times 25 = 3600$ etc...

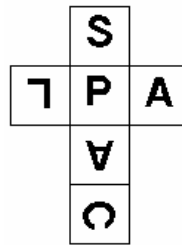
Il primo prodotto fornisce il punto medio di AB. Ciascuno degli altri prodotti consente di fissare 4 punti.

Bisogna però osservare che l'esistenza di tali punti dipende dalla disuguaglianza triangolare cosicché $20 \times 180 = 3600$ non fornisce nulla. Perseverando si vede apparire **la lemniscata di Bernoulli.**

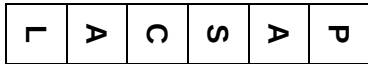


Esercizio 6 : Facce nascoste

Ecco un modello possibile:



e ciò che vede Barbara :



Esercizio 7 : Vasetti pieni

Siano x , y e z le masse rispettive del vasetto piccolo, di quello medio e di quello grande.

Confrontando il ripiano più alto con quello più basso si constata che la massa di un vaso grande più quella di uno piccolo uguaglia la massa di 8 vasi piccoli. Un vaso grande pesa dunque sette volte uno piccolo :cioè $z = 7x$.

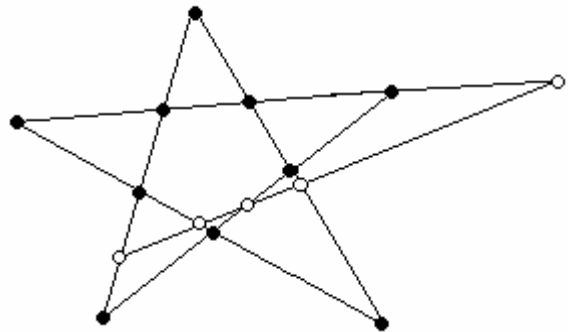
Ogni ripiano sostiene 2,8 kg (un terzo di 8,4 kg), pertanto considerando i primi due ripiani dal basso, si ottiene il seguente sistema :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2,8 \\ 8x + 2y = 2,8 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x = 0,2 \\ y = 0,6 \end{cases} \text{ infine } z = 1,4.$$

I vasi hanno massa rispettivamente 0,2 ; 0,6 e 1,4 kg.

Esercizio 8 : Linee europee

Si può partire da un pentagono stellato che si completerà tracciando una retta che taglia ciascuna retta del pentagono.



Esercizio 9 : Ingranaggi dentati

E' sufficiente considerare le ruote A e B, poiché se una ruota avanza di un dente, tutte le altre ruotano di un dente. Se le ruote A e B devono fare ciascuna un numero intero di giri, il numero dei denti che complessivamente ruotano è il minimo comune multiplo di 14 e 18; $\text{mcm}(14;18) = 126$ e $\frac{126}{14} = 9$ e

$$\frac{126}{18} = 7.$$

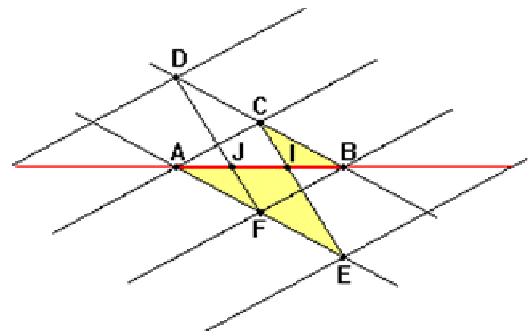
Quindi se **A compie 9 giri allora B ne compie 7.**

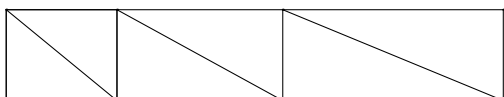
Esercizio 10 : Tutto è in regola

Ci sono più soluzioni; eccone una: i triangoli BIC e AIE

sono simili: quindi $\frac{BI}{AI} = \frac{BC}{AE}$; $AE = 2 BC$ quindi $AI = 2 IB$

e **I si trova ai 2/3 di AB**. Nello stesso modo si dimostrerà che **J si trova a 1/3 di AB** considerando i triangoli simili AJF e BJD.

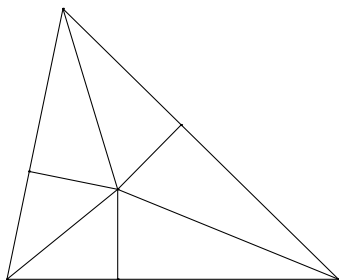




Esercizio 11 : China puzzle

Il triangolo è diviso in 6 triangoli rettangoli simmetrici a due a due. Si dispongono a due a due per formare un rettangolo la cui altezza è il raggio della circonferenza inscritta e la cui base è il semiperimetro del triangolo.

Dalla relazione : $S = R \times \frac{P}{2}$ si ottiene $R = \frac{2S}{P}$.



Esercizio 12 : Il Cambiaeuro

Perché siano possibili 100 operazioni, qualunque sia la banconota introdotta, bisogna partire da 100 banconote da 50 € (al massimo 100 cambi da 100 €), 100 da 20 € (per cambi unicamente da 100 e da 50 €), 200 da 10 €, 200 da 5 €.

Una possibile soluzione (proposta dal comitato francese)

	100 €	50 €	20 €	10 €	5 €
Numero iniziale di biglietti	0	100	100	200	200
Biglietti da 100 € introdotti	x				
Biglietti resi		x	x	2x	2x
Biglietti da 50 € introdotti		y			
Biglietti resi			y	2y	2y
Biglietti da 20 € introdotti			z		
Biglietti resi				z	2z
Biglietti da 10 € introdotti				t	
Biglietti resi					2t
Totale	x = 20	100+ y-x = 130	100+ z-x-y = 40	200+ t-2x-2y-z = 70	200 -2x-2y-2z-2t = 0
Risolvendo	x = 20	y = 50	z = 10	t = 20	

Sono state introdotte: **20 banconote da 100 €, 50 da 50 €, 10 da 20 €, 20 da 10 €.**

Una ulteriore soluzione:

	100	50	20	10	5	risulta
Numero iniziale di biglietti	-----	100	100	200	200	-----
Biglietti da 100 € introdotti	20	80	80	160	160	20
Biglietti da 50 € introdotti	20	130	30	60	60	50
Biglietti da 20 € introdotti	20	130	40	50	40	10
Biglietti da 10 □ introdotti	20	130	40	70	-----	20

Sono state introdotte: **20 banconote da 100 €, 50 da 50 €, 10 da 20 €, 20 da 10 €.**

Esercizio 13 : Non è paccottiglia

Sviluppando la superficie laterale del cono sul piano si ottiene un settore circolare. Su tale settore il cammino più breve da P a P' è il segmento di retta PP' che è la linea di contatto della catenina con il cono.

Il perimetro della base è 21π e la lunghezza della circonferenza di centro S e raggio 35 cm è 70π .

Pertanto l'angolo $\text{PSP}' = 360^\circ \times \frac{21\pi}{70\pi} = 108^\circ$.

La lunghezza della catenina è data da $2 \times 30 \text{ cm} \times \sin(54^\circ)$

- oppure $2 \times 30 \text{ cm} \times \cos(36^\circ)$ - cioè **circa 48,5 cm** (determinata grazie al triangolo rettangolo SHP).

