Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze
Accoglienza 2021 – 2022

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) **In cucina**

Marie-Christine prepara la torta, poi il pesce e infine il pollo. Appena ogni piatto è pronto lo mette nel forno.

Totale minuti impegnati: 40 + 60 + 30 + 10 = 140 che corrispondono a due ore e 20 minuti.

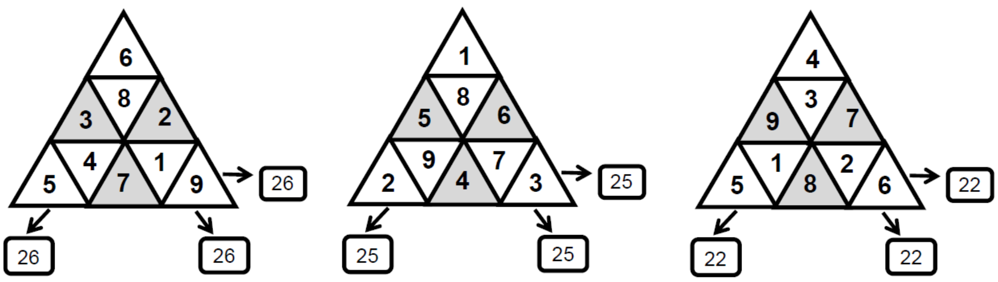
preparazione cottura

10'	20'	30'	40'	50'	60'	70'	80'	90'	100'	110'	120'	130'	140'
torta				torta									
				pesce						pesce			
										pollo			pollo

Esercizio n. 2 (5 punti) **Il triangolo magico**

Occorre considerare le “strisce“ di cinque caselle su ogni lato e fare attenzione alle loro intersezioni.

Alcuni esempi di possibili soluzioni:



Una possibile riflessione per agevolare la scelta operativa

I numeri da 1 a 9 vengono contati due volte tranne quelli delle caselle grigie.
Chiamata S la somma attesa della "striscia" e T la somma dei tre numeri delle caselle grigie si ha:

3S = 2(1 + 2 + 3 + …..9) – T da cui 3S = 90 - T

S è un numero intero e, quindi, T (somma dei tre numeri delle caselle grigie) deve essere divisibile per 3.

Esercizio n. 3 (7 punti) **A coppie**

Si hanno solo due casi: a = 1 oppure a = 2 in quanto cifra delle centinaia della somma di tre numeri di due cifre.
Si considera lo sviluppo polinomiale degli addendi

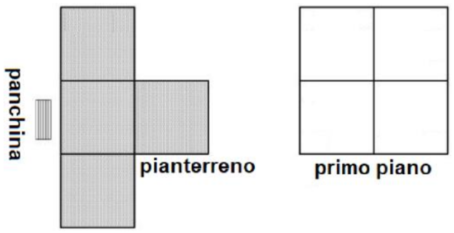
10(a+b+c) + (a+b+c) = 100a + 10b + c da cui b + 10c = 89a

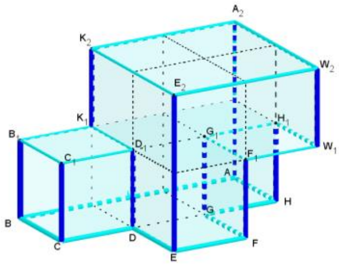
per a = 1 si ha b = 9 c = 8 e si ottiene il numero **198**
per a = 2 si ha b + 10c = 178 impossibile

Esercizio n. 4 (5 punti) **Padiglione illuminato**

Attenzione al testo che afferma che il padiglione è composto da 8 e non da 9 cubi come il disegno del progetto rischierebbe di far pensare.
Elemento, quindi, focale per la risoluzione, poi, di semplice calcolo, è l'intuizione della collocazione del cubo "vuoto": nell'immagine è possibile riconoscere le facce di otto cubi, pertanto il cubo mancante necessariamente è quello di cui non è visibile alcuna faccia.

Nella figura laterale sono riportate le piante della base e del primo piano:





e il cubo vuoto è quello che ha come tetto il quadrato W_1 H_1 G_1 F_1:

La superficie di base è formata da quattro quadrati di lato 5 m,
di conseguenza la superficie di base è di **100 m²**.

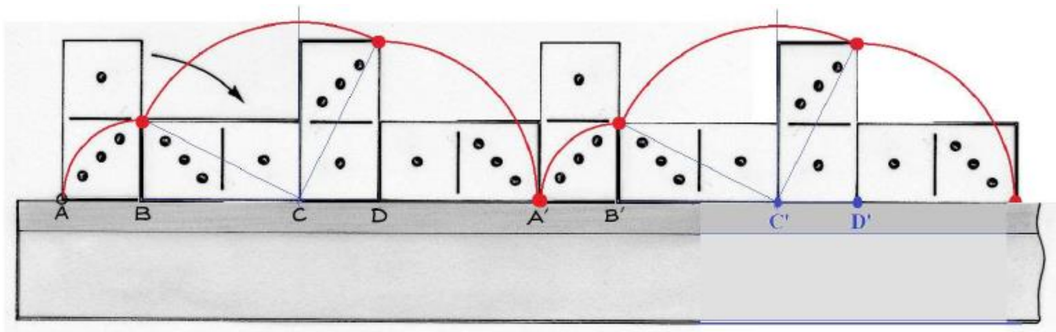
Gli spigoli verticali misurano 5 m ciascuno e sono **12**:
B_1B – C_1C – D_1D – E_2E – F_1F - G_2G_1 - H_1H – W_2W_1 – A_2A – K_2K_1 tenendo conto che sia E_2E sia A_2A sono ciascuno il doppio di due spigoli uguali.
La lunghezza complessiva è pertanto di **60 cm**.

La superficie laterale totale è la somma delle superficie laterale del piano terra e del primo piano:
- S_1 è composta da un rettangolo di 15 cm · 5 cm e da 7 facce quadrate di superficie 5 cm · 5 cm, complessivamente S_1 = 350 cm²
- S_2 è composta da 4 rettangoli di 10 cm · 5 cm, S_2 = 100 cm²,

per cui **S = 450 m²**

In forma sintetica si ottiene lo stesso risultato individuando **18** facce quadrate di 5 cm di spigolo: S = 18·25 m²

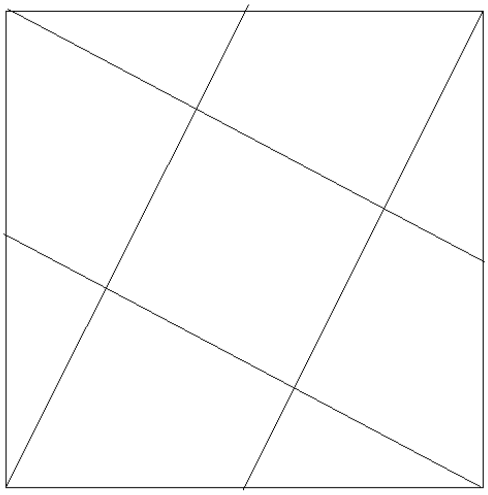
Esercizio n. 5 (7 punti) **Domino rotante**



Attenzione: il punto A in A' rimane fermo durante la rotazione.

Lunghezza del percorso del punto A $(\pi + \pi\sqrt{5} + 2\pi + \pi + \pi\sqrt{5} + 2\pi)$ cm ~ 33 cm.

Esercizio n. 6 (5 punti) **Pavimento quadrato**



Il lato dell'ingresso di Sacha è:

$$\sqrt{5 \cdot 50^2}\ cm^2 = \sqrt{12\ 500}\ cm^2 \approx 112\ cm$$

In scala 1/10 il lato del disegno richiesto dovrà misurare circa 11,2 cm.

Esercizio n. 7 (7 punti) **Tic tac tac tic**

Il quesito è formulato con riferimento a un contesto reale in cui potrebbe inconsapevolmente essere assunto il riferimento di un orologio funzionante correttamente, o di un orologio che “corre” (con risultato d’anticipo di 2 minuti all’ora) o che “ritarda” (con risultato di un ritardo di 1 minuto all’ora).

La rappresentazione fornita è di una situazione di tre orologi a lancette tutti presenti sincronizzati sulle 12.

Si suggerisce di affrontare la situazione generalizzata; la questione è, infatti, d’ individuare:

1) dopo quanto tempo le due lancette dei due orologi funzionanti in modo difettoso si troveranno in posizioni uguali sui due orologi;

2) in quale posizione si troveranno le lancette degli altri due orologi;

3) quale sarà, invece, l’ora indicata dall’orologio funzionante;

4) approfondendo, se si può prevedere un’ora in cui le lancette di tutti e tre gli orologi saranno sovrapposte ugualmente.

A tal fine si riportano nella tabella seguente a confronto i ritardi e gli anticipi progressivi e, corrispondentemente, nell’ultima colonna si evidenziano le deduzioni conseguenti:

Orologio funzionante		II Orologio: anticipo 2 minuti /h	III Orologio: ritardo 1 minuto/h	**Deduzioni**
Giorno	ora	minuti	minuti (-)	
	1	2	1	
1	24	48	24	
5	120	240	120	
10	240	480 = 8 ore	240 = 4 ore	Il II orologio segna 8 (12 + 8 =20) Il terzo segna 12 – 4 = 8 Di fatto **i due orologi mal funzionanti dopo 10 giorni segnano entrambi le 8, mentre l’orologio funzionante segna le 12.**
15	360	720	360	
20	480	960	480	
25	600	1200	600	
30	720	1440 = 24 ore	720 = 12 ore	Il II orologio segna 12 (12+ 24 =36), il III 12 (12 – 12 = 0) Di fatto **i due orologi mal funzionanti segnano entrambi le 12 come pure il I orologio, cioè tutte le lancette dei tre orologi segnano a lancette sovrapposte la stessa ora.**

Esercizio n. 8 (5 punti) **Extraterrestri**

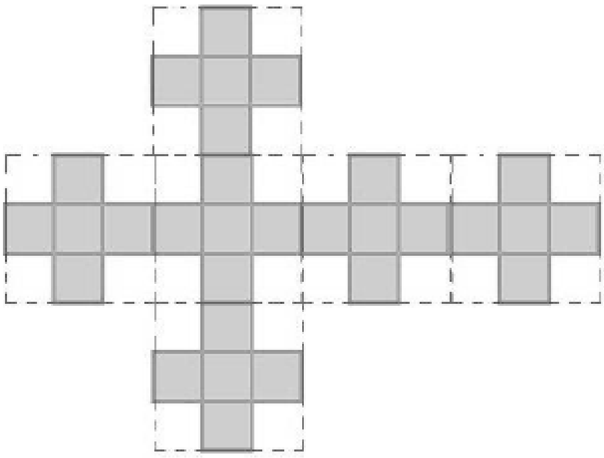
Lo sviluppo è esponenziale fino alla quinta stagione, poi gli individuidalla sesta aumentano solo di 18 per le altre 5 stagioni, cosicchè al termine delle 10 stagioni gli individui saranno **122:**

stagione	n. individui presenti all'inizio della stagione	n. individui che si riproducono	n.individui che non si riproducono	n. individui al termine della stagione
quinta	16	16		32
sesta	32	18	14	32 + 18 = 50
settima	50	18	32	32+ 2·18 = 68
ottava	68	18	50	32+ 3·18 = 86
nova	86	18	68	32+ 4·18 = 104
decima	104	18	86	32+ 5·18 = **122**

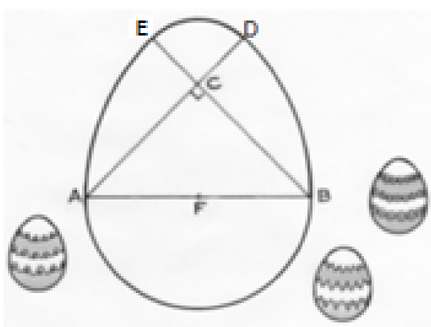
Esercizio n. 9 (7 punti) **Cubo su cubo**

30 facce.

Un possibile sviluppo:



Esercizio n. 10 (10 punti) **Uovo di Pasqua**



Per facilitare il calcolo richiesto si assume:
$\pi \simeq 3{,}14$; $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$

Il segmento AB misura 6 cm arco AB = 3 π cm $\simeq 9{,}42$ cm

Gli angoli alla base AB del triangolo rettangolo isoscele ABC sono di 45°

arco BD = arco AE = $\frac{1}{8} 2\pi \cdot 6 \text{ cm} \simeq 4{,}71 \text{ cm}$

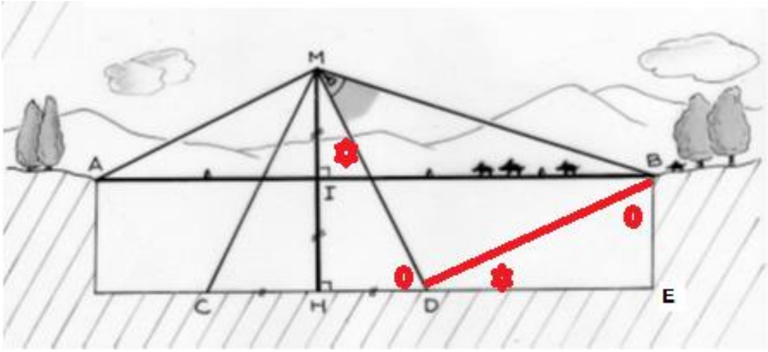
$AC = \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ cm} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ $CD = \left(6 - 3\sqrt{2}\right) \text{cm}$

Arco ED = $\frac{1}{4} 2\pi\left(6 - 3\sqrt{2}\right) \text{cm} \simeq 2{,}78 \text{ cm}$

Il perimetro richiesto misura circa (9,42 + 9,42 + 2,78) cm ≃ 21,6 cm.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **La passerella per la selvaggina**



I triangoli BDE e MHD sono uguali.

Consegue: MD = DB.

L'angolo BDE (uguale all'angolo DMH) è complementare dell'angolo HDM.

Il triangolo DMB è, pertanto, un triangolo rettangolo isoscele e l'angolo DMB richiesto misura 45°.

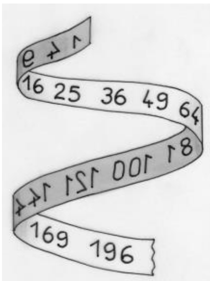
In alternativa, con l'utilizzo della trigonometria:

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo MIB si ha MB = $\sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10}$

analogamente nel triangolo MHD si ha MD = $\sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}$.
L'angolo IMB è di 71,565° dato che la sua tangente è 3 mentre l'angolo HMD è di 26,565° dato che la sua tangente è ½.
Ne consegue che l'angolo DMB richiesto è di 45°.

Esercizio n. 12 (7 punti) **Non è magia**

$$\begin{cases} n + 79 = k^2 \\ n + 10 = m^2 \end{cases}$$



Per differenza si ottiene $k^2 - m^2 = 69$

Si ottengono i due sistemi:

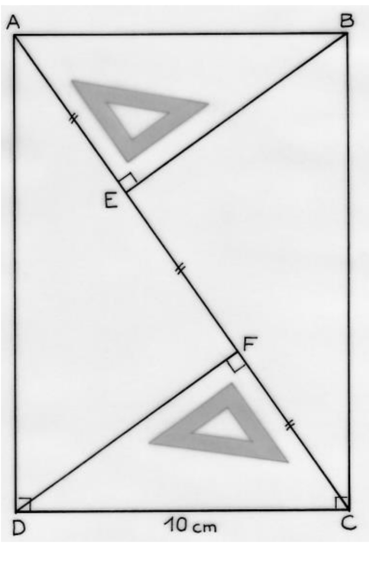
$$\begin{cases} k - m = 3 \\ k + m = 23 \end{cases} \qquad \begin{cases} k - m = 1 \\ k + m = 69 \end{cases}$$

2k =26 k = 13
m = 10

2k = 70 k = 35
m = 34

Jean ha ragione! Ci sono due soluzioni.
n = 10^2 *– 10 = 90* *n = 34*^{2} *– 10 = 1 146*

Esercizio n. 13 (10 punti) **Rettangolo e diagonale**



Posto AE = x, consideriamo i triangoli ABE e ABC.

BE^2 = 10^2 – x^2 (teorema di Pitagora) e BE^2 = x · 2x (secondo teorema di Euclide)

da cui 10^2 – x^2 = x · 2x 3x^2 = 10^2 $x^2 = \frac{10^2}{3}$ $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ACD si ha:

$$AD = \sqrt{9\frac{10^2}{3} - 10^2}\ \text{cm} = \sqrt{200}\ \text{cm} = 10\sqrt{2}\ \text{cm}\ .$$