

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Accoglienza 2016 - 2017

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) Più o meno

Nell'ipotesi originale del gioco (6 carte di cui tre positive e tre negative) Paul ha 12 su 30 possibilità di vincere,

nella seconda ipotesi di gioco (5 carte di cui tre positive e due negative) Paul ha 8 su 20 possibilità di vincere,

ma $12/30 = 2/5$ e $8/20 = 2/5$

Paul non ha ragione perché levare una carta che riporta un numero negativo non cambia la sua probabilità di vittoria.

	+1	+2	+3	-1	-2	-3
+1		+	+	-	-	-
+2	+		+	-	-	-
+3	+	+		-	-	-
-1	-	-	-		+	+
-2	-	-	-	+		+
-3	-	-	-	+	+	

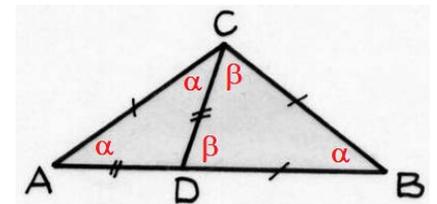
	+1	+2	+3	-1	-2
+1		+	+	-	-
+2	+		+	-	-
+3	+	+		-	-
-1	-	-	-		+
-2	-	-	-	+	

Esercizio n. 2 (5 punti) Angoli e triangoli

I tre triangoli ABC, BCD e ADC sono isosceli da cui le uguaglianze indicate in figura.
La somma delle misure degli angoli dei triangoli ABC e BCD porta al sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ 3\alpha + \beta = 180^\circ \end{cases}$$

Risolvendolo si ottiene: $\alpha = 36^\circ$ e $\beta = 72^\circ$



Si può arrivare alla soluzione in vari modi, anche senza ricorrere a un sistema di equazioni, ad esempio tenendo conto del teorema dell'angolo esterno.

Esercizio n. 3 (7 punti) Il cubo che rotola

Si riportano tutti i possibili percorsi, ma la richiesta è di individuare un solo percorso con somma minima (22) e uno con somma massima (26).

6	5	1	2
3			
1			
4			
Somma 22			
	2	2	4
	3	6	
1	5		
4			
Somma 25			
	6	3	1
	2		
	1		
4	5		
Somma 22			
			1
			2
	1	3	6
4	5		
Somma 22			

	6	4	1
3	5		
1			
4			
Somma 24			
		2	
	3	6	4
1	5		
4			
Somma 25			
		6	5
	2	3	
	1		
4	5		
Somma 26			
		6	2
		4	
		1	
4	5	3	
Somma 25			

		6	2
3	5	4	
1			
4			
Somma 25			
		1	2
		3	
1	5	6	
4			
Somma 22			
			6
	2	3	5
	1		
4	5		
Somma 26			
			6
		4	2
		1	
4	5	3	
Somma 25			

			6
3	5	4	2
1			
4			
Somma 25			
			1
		3	2
1	5	6	
4			
Somma 22			
		4	6
		2	
	1	3	
4	5		
Somma 25			
			5
			4
		1	2
4	5	3	
Somma 24			

	2	6	5
	3		
1	5		
4			
Somma 26			
			5
			3
1	5	6	2
4			
Somma 26			
			4
		2	6
	1	3	
4	5		
Somma 25			
			6
			5
			1
4	5	3	2
Somma 26			

Esercizio n. 4 (5 punti) Richiamo all'ordine

Si può procedere in modo diretto oppure, come a seguire, iniziando da 1 2 3 4 5 0 (la casella vuota è indicata con 0).

123450	123450
02345 1	10345 2
3 20451	1 43052
32 5 401	043 1 52
3054 2 1	3 40152
Le due soluzioni sono:	345021
	345102

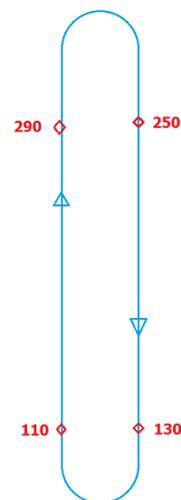
Esercizio n. 5 (7 punti) La seggiovia

Osservando con attenzione lo schema si deduce che il seggiolino n.1 è tra Eloïse (n. 290) e Oscar (n. 110).
 Tra il seggiolino (n. 130) e il seggiolino (n. 250) ci sono 119 seggiolini.
 Dato che i seggiolini sono ugualmente distribuiti, ci sono 119 seggiolini anche tra Eloïse (n. 290) e Oscar (n. 110) e precisamente 109 dal n.1 al n.109 e 10 dal n.291 al n.300.

Nota: è possibile risolvere il problema anche utilizzando una equazione di primo grado.

Ad esempio, dopo analoghe considerazioni iniziali, detto x il numero di seggiolini a partire dal n.291 a quello finale, si ha:

$$x + 109 = 119 \rightarrow x = 10 \text{ per cui numero totale di seggiolini è } \mathbf{300}.$$



Esercizio n. 6 (5 punti) Lettere e cifre

- A + S = T**
- R + I = A**
- A - S = D**
- D x D = I**
- T : D = I**

Uno dei possibili procedimenti risolutivi:

dalle ultime due relazioni si ricava che $T = D^3$ da cui si deduce che **D = 2** in quanto unico numero naturale <10 con cubo minore di 10. Ne consegue **I = 4** e **T = 8**.

Da $A + S = 8$ e $A - S = 2$ si ricava **A = 5** e **S = 3**.

Infine, da $R + 4 = 5$, si ottiene **R = 1**.

Il codice è 538142.

Esercizio n. 7 (7 punti) Il labirinto dei Troll

Dato che i Troll sono 72, ce ne saranno 24 per riga \rightarrow A ne contiene $24 - (11 + 0) = 13$. Le relazioni in gioco sono:

$$D + G = 24 - 13 \rightarrow D + G = 11$$

$$E + H = 24$$

$$F + I = 24 - 11 \rightarrow F + I = 13$$

$$D + E + F = 24$$

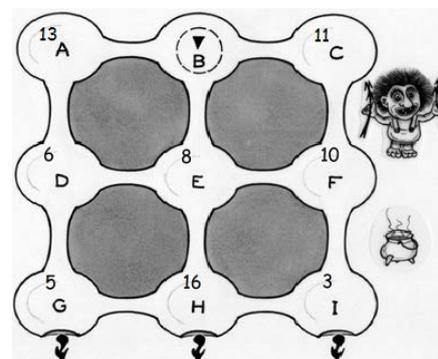
$$G + H + I = 24$$

$$E + I = 24 - 13 \rightarrow E + I = 11$$

$$E + G = 24 - 11 \rightarrow E + G = 13$$

Utilizzandone alcune in modo opportuno si ottiene:

$$\mathbf{D = 6 \quad E = 8 \quad F = 10 \quad G = 5 \quad H = 16 \quad I = 3}$$



Il percorso che ci permette di uscire è **BEDG** perché con le 20 pozioni posso bloccare i 19 troll che si incontrano.

Esercizio n. 8 (5 punti) Gioco di piattaforme

Il rapporto delle velocità della piattaforma mobile e della formica deve essere $\frac{6}{9}$ per permettere il passaggio dalla piattaforma fissa di sinistra a quella mobile.

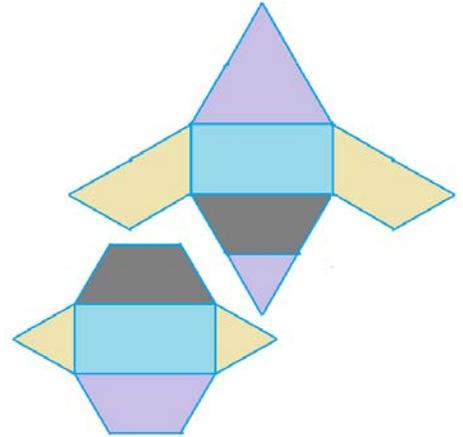
Dato che $\frac{9,2-6}{4,8} = \frac{6}{9}$ la piattaforma mobile sarà allineata con quella fissa di destra.

La formica, quindi, deve muoversi a una velocità che sia $\frac{3}{2}$ di quella della piattaforma mobile per raggiungere, senza cadere nel vuoto, la piattaforma di destra.

Esercizio n. 9 (7 punti) Due da uno

La faccia più scura è il piano della sezione.

Il taglio nelle facce equilateri della piramide d'origine determinano angoli di 60° .



Esercizio n. 10 (10 punti) Rapporto puntiglioso

Il rapporto delle aree dei triangoli dati ADE e ABC, equilateri e quindi simili, è pari al rapporto dei loro lati al quadrato.

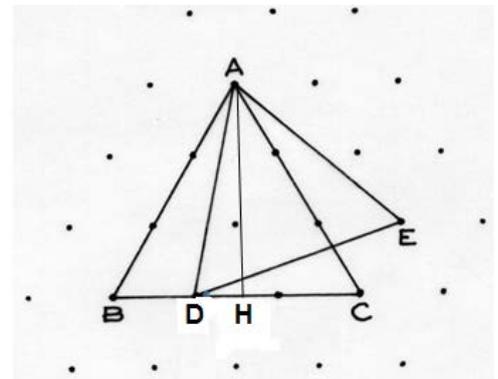
Posto $BC = 3a$ avremo, osservando il reticolo, $BD = a$

$$DH = \frac{1}{2}a \quad AH = 3\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \rightarrow AD^2 = \frac{27}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \rightarrow AD^2 = 7a^2$$

Il rapporto delle aree dei triangoli dati ADE e ABC è:

$$\frac{7a^2}{9a^2} = \frac{7}{9}$$



Nota: l'esercizio potrebbe essere risolto senza l'utilizzo di formule, solo con ritagli e ricomposizione di triangolini del reticolo. (procedimento interessante ma di non semplice visione)

Presa come unità d'area il triangolino base del reticolo si ha: $A_{ABC} = 9$

$$A_{ABD} = A_{ACE} \rightarrow A_{ABC} = A_{ADCE}$$

$$\text{quindi } A_{ADE} = A_{ADCE} - A_{DCE}$$

ma $A_{DCE} = 2$ (in quanto DCE è metà di un parallelogramma di lati DC e CE, avente area 4) $\rightarrow A_{ADE} = 7$.

Quindi il rapporto delle aree dei triangoli ADE e ABC è **$\frac{7}{9}$**

Speciale terze

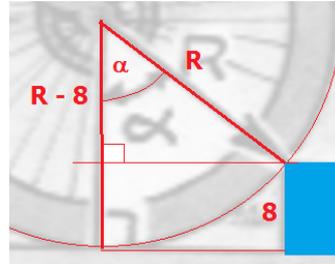
Esercizio n. 11 (5 punti) Addio alle "piccole ruote"

$$R - R \cos \alpha = 8$$

$$\cos \alpha = (R - 8) / R \quad \text{da cui} \quad \alpha = \arccos((R - 8) / R)$$

Con i diversi raggi si ha:

$$\begin{array}{ll} R = 13 & \alpha = 67,38 \\ R = 13,75 & \alpha = 65,28 \\ R = 14,5 & \alpha = 63,37 \end{array}$$



Esercizio n. 12 (7 punti) Frazioni fantasiose

$$\frac{9}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{93}{55} + \frac{39}{55} = \frac{132}{55} \rightarrow \frac{12}{5}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\frac{9}{5}} + \boxed{\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{93}{55}} + \boxed{\frac{39}{55}} \\ \boxed{\frac{a}{c}} + \boxed{\frac{b}{c}} = \boxed{\frac{a|b}{c|c}} + \boxed{\frac{b|a}{c|c}} \end{array}$$

Nel caso generale, tenendo conto del nostro sistema di numerazione posizionale, si ha:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{10a + b + 10b + a}{10c + c} = \frac{11(a + b)}{11c} \rightarrow \frac{a + b}{c}$$

Le uguaglianze sono entrambe vere.

Esercizio n. 13 (10 punti) Rilievo e misura

P è il punto medio del segmento AB sulla figura iniziale, quindi $PB = PA$ e i punti A e B coincideranno nell'assemblaggio.

Gli angoli in P sono supplementari, quindi i punti H_1 , P e H_2 saranno allineati sull'assemblaggio.

La somma degli angoli del quadrilatero iniziale è 360° , quindi l'assemblaggio sarà senza interstizi.

Si ottiene un quadrilatero con 4 angoli retti: è un rettangolo, di lunghezza $2MN/2 = MN$, di larghezza $2PH = 2PK$ e di area $MN \cdot 2PH$.

Per calcolare l'area del quadrilatero ABCD si potrà misurare i segmenti MN e PH per, infine, ottenere $A_{ABCD} = 2MN \cdot PH$.

