

Matematica Senza Frontiere

Proposta di soluzioni
Accoglienza 2011-2012

Esercizio 1 (7 punti) Cronometro a stoppino

La soluzione deve essere redatta in tedesco, inglese, spagnolo o francese con un minimo di 30 parole.

$$4 + (3 - 1) = 6.$$

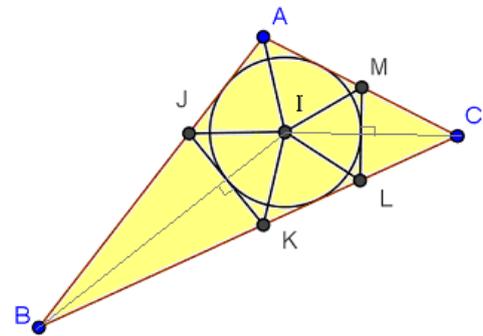
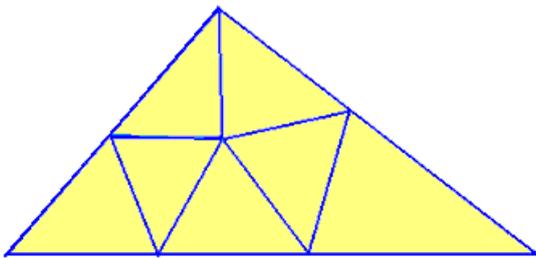
Il custode del castello inizialmente accende tutte le tre candele.

Un'ora dopo la candela piccola si spegne. Egli spegne allora la media che ha quindi ancora due ore di possibile utilizzo.

Quando la candela da 4 ore si spegne, il custode riaccende la media per aggiungere altre due ore e andrà ad aprire la porta allo spegnimento di questa candela.

Esercizio 2 (5 punti) Un'acuta partizione

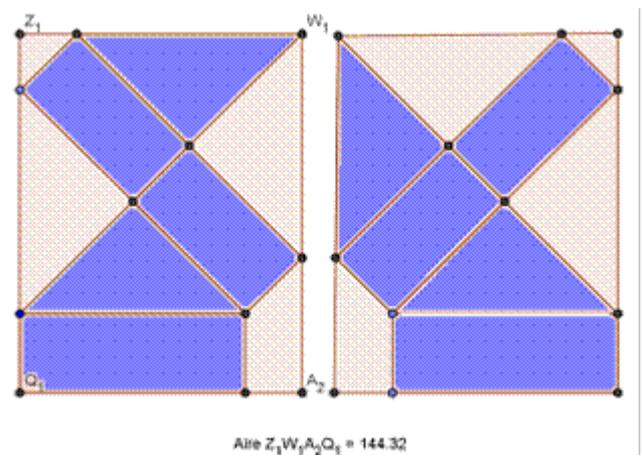
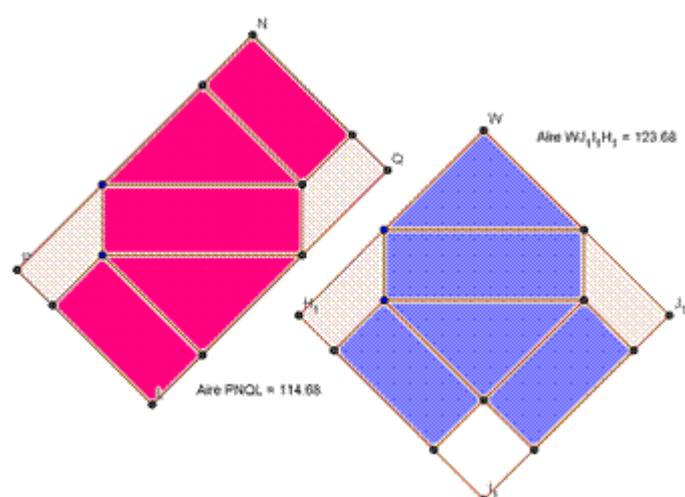
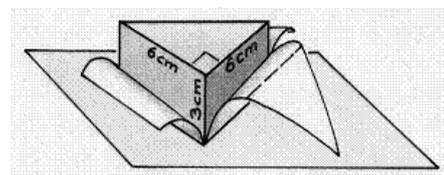
Ecco, a sinistra, un esempio di triangolo ottusangolo diviso in 7 triangoli acutangoli:



La costruzione a destra, con le tangenti al cerchio inscritto, permette di provare che una tale partizione è sempre possibile (prova non richiesta).

Esercizio 3 (7 punti) Modello economico

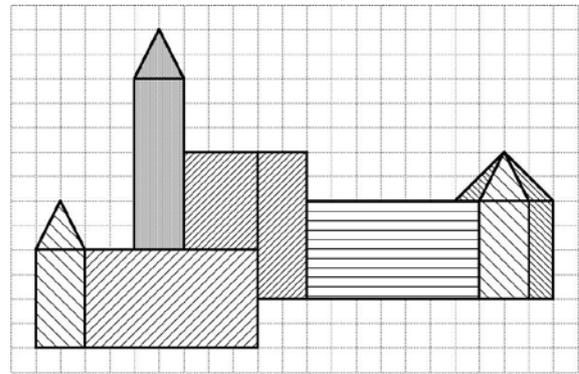
Ecco alcuni esempi di sviluppi del prisma inscritti in rettangoli:



Il più "economico" è il primo a sinistra: per paragonare le aree non è necessario calcolarle, basta paragonare gli scarti.
N.B. il primo sviluppo è molto economico perché permette una tassellatura del piano.

Esercizio 4 (5 punti) Haut-Koenigsbourg

Ecco un prospetto della facciata Nord:



Esercizio 5 (7 punti) Un conto impagabile

Ecco la lista delle somme pagabili inferiori a 30 € :

somme	5	7	10	12	14	15	17	19	20	21	22	24	25	26	27	28	29	30
monete	5	7	5+5	5+7	2x7	3x5	10+7	12+7	4x5	3x7	17+5	19+5	5x5	19+7	22+5	4x7	22+7	6x5

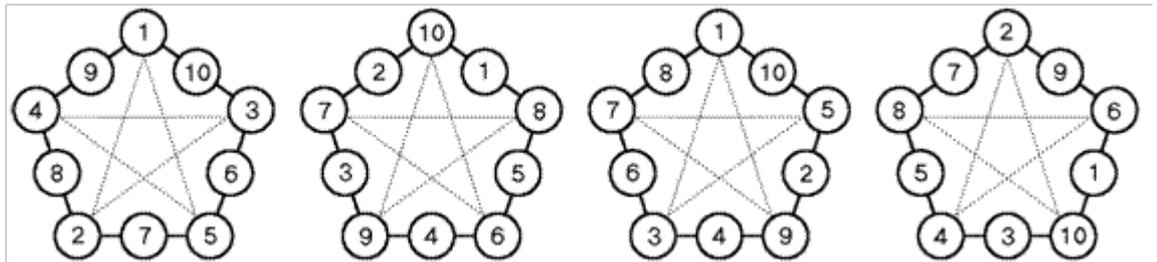
Da 26 € a 30 € ci sono 5 somme pagabili consecutive.

Si può quindi indovinare un modo per ottenere somme superiori a 30 € aggiungendo un multiplo di 5 a una di queste; oppure notando che da 24 ci sono 7 somme pagabili consecutive è sufficiente aggiungere un multiplo di 7.

Esercizio 6 (5 punti) Pentagono magico

Ecco di seguito quattro soluzioni possibili, di ognuna si possono ottenere 10 varianti per simmetria o rotazione.

NB: è richiesta una sola soluzione.



Esercizio 7 (7 punti) 2 cifre, 3 angoli

Ci sono 5 soluzioni : $48+48+84$; $60+60+60$; $81+81+18$; $86+86+8$ e $88+88+4$.

Esercizio 8 (5 punti) Tre di troppo

Sia n il numero di soldati. A ogni comando del centurione rimangono tre uomini fuori posto:

$n-3$ è quindi multiplo di 4, di 5 e di 7. Il minimo comune multiplo è 140, per cui $n = 143$.

$143 = 11 \times 13$ fornisce i due possibili schieramenti.

Esercizio 9 (7 punti) Tale padre, tale figlio

Si ottiene la successione di Fibonacci, con dei rettangoli 2×3 ; 3×5 ; 5×8 etc.

Al **13° giorno**, si ha un rettangolo 987×1597 la cui area supera $1,5 \times 10^6$ mm².

(si accetta la risposta : «il 14° giorno»)

Esercizio 10 (10 punti) Curva del liutaio

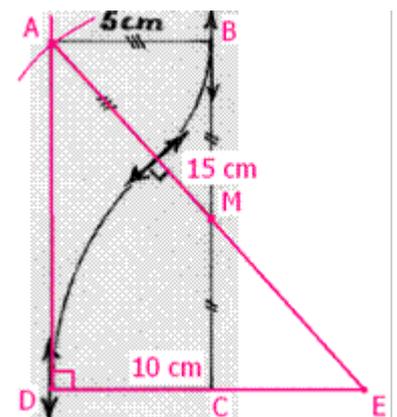
La curva BD è composta da due archi di circonferenza.

Per come sono le tangenti, la circonferenza minore ha centro in A e raggio di 5 cm e la maggiore ha centro in un punto E di DC.

M è il punto medio del segmento BC; per il teorema di Talete (o per le proprietà del parallelogramma o per la simmetria centrale) si ha che $AB = CE = 5$ cm.

Si deduce che il raggio dell'arco maggiore è 2×5 cm.

Costruiamo il triangolo ADE rettangolo in D tale che $ED = 10$ cm e $EA = 15$ cm, poi ABCD e i due archi di circonferenza.



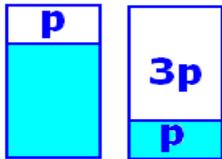
Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti) Il numero di Lea

Con due possibilità su tre di vedere ritirato il suo quaderno, Lea ha ricevuto un numero **multiplo di quattro dei sei numeri 1, 2, 3, 4, 5 o 6** del dado.

I soli numeri, tra 1 e 27, che verificano questa proprietà sono: **6, 18 e 20**.

Esercizio 12 (7 punti) Una partizione armoniosa

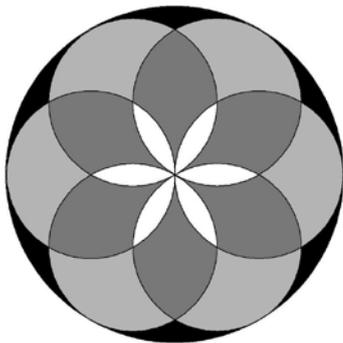


Sia p la percentuale di autonomia della batteria consumata da Harold. Nello stesso tempo Maud avrà consumato $3p$.

Cambieranno le loro batterie quando $p = 100 - 3p$ da cui $p = 25\%$.

Lo scambio si farà a mezzogiorno, dopo 3 ore d'uso.

Ognuno avrà a disposizione 6 ore per ascoltare o per giocare.



Esercizio 13 (10 punti) In 4 colori

Ogni regione, bianca, grigio scuro, grigio chiaro o nera è una composizione di sei superfici elementari. Converrà quindi considerare questi elementi.

Ogni petalo della superficie bianca è un accostamento di due segmenti circolari come quello tratteggiato in figura 1.

I due ritagli a fianco mostrano che gli elementi grigio scuro e grigio chiaro hanno la stessa area evidentemente più grande dell'area dell'elemento bianco (I rombi hanno angoli 60° e 120°).

Se si completa un elemento nero con due segmenti circolari bianchi, si ottiene un ingrandimento del segmento tratteggiato: le sue dimensioni sono raddoppiate (omotetia di rapporto 2).

Per questo ingrandimento, l'area è stata quadruplicata, l'elemento nero ha dunque un'area doppia di quella del segmento tratteggiato di figura 1, e gli elementi neri e bianchi hanno la stessa area!

Concludendo: nero = bianco < grigio chiaro = grigio scuro.

NB: a questo risultato si può arrivare col calcolo, ma è un procedimento alquanto noioso.

Fig. 1

