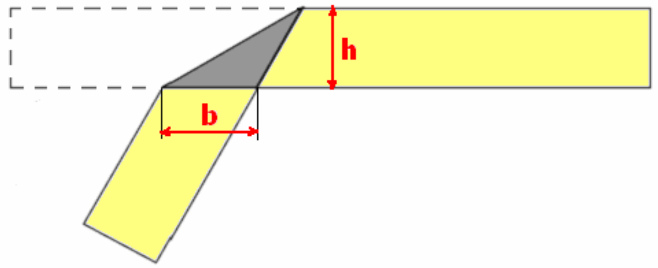
Matematica Senza Frontiere

## Elementi di soluzione per la prova di accoglienza 2008-09

### Esercizio 1 (7 punti) Chissà se ce la fa !

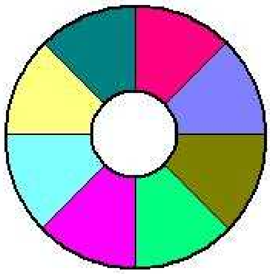
Da 000 a 999, per questo lucchetto ci sono 1000 codici possibili.
30 minuti =1800 secondi ➔Chantal può provare al massimo 899 codici, dato che le servono 2 secondi per tentativo.
La probabilità di trovare la combinazione giusta in meno di mezz'ora è del 90%

### Esercizio 2 (5punti) La piega



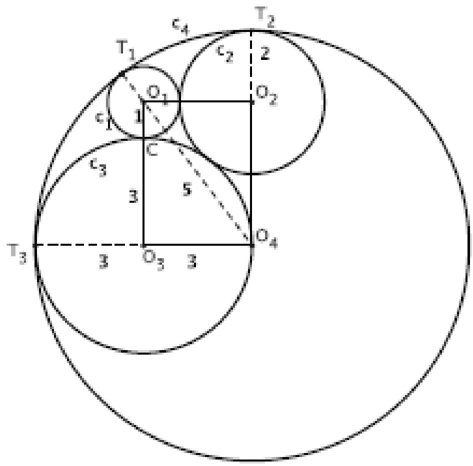

L'area del triangolo è *(bxh)/2*
L'altezza del triangolo è costante e uguale alla larghezza della striscia di carta. la sua area sarà minima quando è minima la base. In questo caso la base è uguale alla larghezza della striscia.
Il triangolo minimo è rettangolo isoscele

### Esercizio 3 (7 punti) Nuovo logo



Il disco centrale e gli 8 settori devono avere uguale area. L'area totale del disco grande è 9 volte l'area del disco centrale.Il suo raggio è quindi triplo del raggio del disco centrale, cioè 6 cm

### Esercizio 4 (5 punti) Corsa tra amici

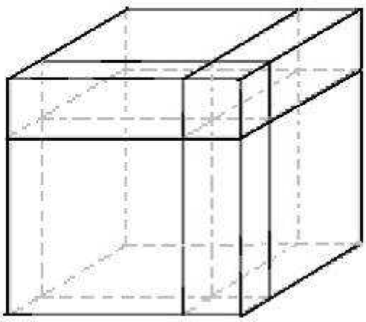


$r_1 = 1$ $r_2 = 2$ $r_3 = 3$ $r_4 = 6$
$T_3O_4 = T_1O_4 = T_2O_4 = 6$ (raggi della circonferenza $C_4$ di centro $O_4$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 2\pi \cdot 1 = 6{,}28 \\ C_2 = 2\pi \cdot 2 = 12{,}56 \\ C_3 = 2\pi \cdot 3 = 18{,}84 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 37{,}68$$

$C_4 = 2\pi \cdot 6 = 37{,}68$
Quindi $C_1 + C_2 + C_3 = C_4$ e considerato che impiegano entrambi 3 ore la loro velocità media è uguale.

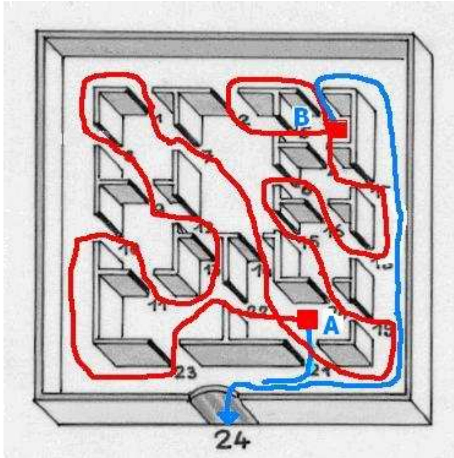
### Esercizio 5 (7 punti) Espressione cubista



Ecco una veduta in prospettiva dell'assemblaggio. Si possono vedere sette degli otto pezzi che lo costituiscono, il cubo iniziale è nascosto.
Questo assemblaggio illustra l'uguaglianza

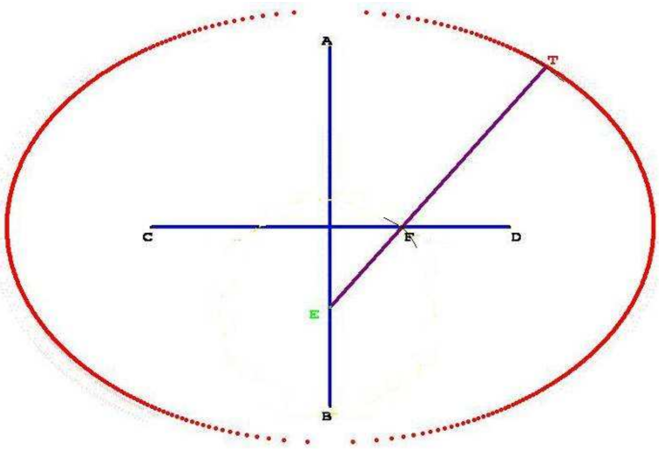
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

**Esercizio 6** (5 punti) **Labirinto**




Le stanze con un numero pari di porte non potranno trovarsi all'inizio o alla fine del percorso. Ci sono due stanze con numero dispari di porte. Bisogna andare in una di queste che chiameremo A, l'altra la chiamiamo B: in questa si preme il pulsante "*ripristino*". Si deve percorrere un circuito, passante per tutte le porte aperte, che termina necessariamente in B dove ci si trova chiusi: e quindi, la porta 24 si apre. Basta premere il bottone per uscire.
Il corridoio può essere considerato come una stanza.

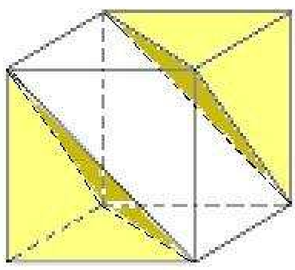
**Esercizio 7** (7 punti) **Scorrendo scorrendo**

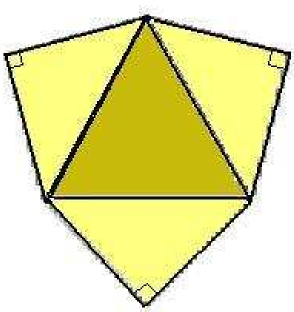



Tracciando punto per punto T individua la traiettoria del disegno.

*Uno studio analitico qui non richiesto porta all'equazione $4x^2+9y^2=324$ cioè ad un'ellisse.*

**Esercizio 8** (5 punti) **Tre per uno**





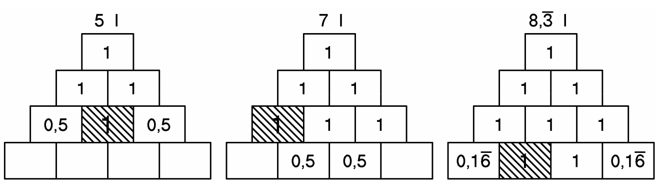
Ecco una veduta delle due piramidi che completano il solido di cui è dato lo sviluppo.
La figura a destra rappresenta un possibile sviluppo di queste piramidi.

**Esercizio 9** (7 punti) **Tic tac tic tac**

Per ogni ora che passa, il primo orologio va avanti di due minuti e il secondo ne perde uno. La differenza fra le visualizzazioni aumenta dunque di tre minuti. L'orologio che va avanti raggiungerà il più lento quando questa differenza sarà di 12 ore. In 12 ore "3 minuti " è contenuto 240 volte. Sono necessarie 240 ore ossia 10 giorni perché le due visualizzazioni coincidano di nuovo.

**Esercizio 10** (10 punti) **La coppa è piena**

Serve 1 litro per riempire la vasca 1.Successivamente deborda in modo uguale nelle vasche 2 e 3 che saranno piene quando **sono stati versati 3 litri nella 1**. La vasca 5 è alimentata da 2 e da 3 e riceve la metà dei litri successivi mentre 4 e 6 ne ricevono ¼. Servono quindi 2 litri supplementari cioè **servono 5 litri per riempire la vasca 5,** mentre la vasca 4 non sarà piena che dopo aver versato 7 litri nella vasca 1.



La vasca 8 prima è alimentata solo dalla 5, poi dalla 5 e dalla 4 quando anche questa è piena. Essa riceve ¼ di ciascuno del sesto e settimo litro e contiene ½ litro dopo che è stato versato il settimo litro nella vasca 1. Per i litri successivi essa riceve 1/4di litro dalla vasca 5 e 1/8di litro dalla vasca 4, cioè 3/8 della quantità versata in 1.Sia x questa quantità supplementare.

Si ha : $\frac{3}{8}x=\frac{1}{2}$ da cui $x=\frac{4}{3}$. bisogna versare ( $7+\frac{4}{3}$)di litro,

cioè $\boxed{\left(8+\frac{1}{3}\right) \text{ di litro nella vasca 1 per riempire completamente la vasca 8}}$.

**Esercizio 11** **(5 punti)** **Ottomania**

Battendo $8^{88}$su una calcolatrice, si ottiene in forma approssimata la notazione 2.9643…x$10^{79}$.
E' un numero di 80 cifre che comincia per 2. Si osserva che le prime potenze di 8 hanno l'ultima cifra che si ripete con periodicità 8;4;2;6;8;4……Tutti gli esponenti multipli di 4 hanno come ultima cifra 6.
➔il codice di Xiù è 2806.

**Esercizio 12** **(7 punti)** **Allacciamo…le scarpe**

Il calcolo delle lunghezze dei segmenti obliqui mediante il teorema di Pitagora permette di esprimere le lunghezze totali di ciascuna delle stringhe.

$$B=7a+7\sqrt{1+a^2}+\sqrt{49+a^2} \quad ; \quad C = 7a+2+6\sqrt{4+a^2} \quad ; \quad D = 7a+7+7=7a+14$$

essendo $a^2$ positivo, risulta : $\sqrt{1+a^2}>1$ ; $\sqrt{49+a^2}>7$ e $\sqrt{4+a^2}>2$

➔ $B > D$ e $C > D$

non è richiesto il confronto di B con C che è più difficile, per stabilire che B>C>D si potrebbe tener conto della disuguaglianza triangolare.

**Esercizio 13** **(10 punti)** **Cosa rimane?**

Ecco un merletto di Sierpinski di rango 3. Ogni triangolino scuro è 1/64 del triangolo iniziale. L'area del merletto (la parte colorata) è 27/64 dell'area del triangolo iniziale.
Si nota che ad ogni tappa il merletto perde ¼ della sua area ➔ ad ogni tappa la sua area è ¾ della precedente.
Al rango 8, rimane $(3/4)^8$ = 6561/65536 cioè circa il 10,01% dell'area iniziale.