

Elementi di soluzione per la correzione della prova di accoglienza dicembre 2005

Esercizio 1: Campioni in erba

Per ciascun ragazzo, si indica il numero delle reti segnate con l'iniziale del nome e si indica con N il numero di reti segnate da colui che parla.

Si hanno le seguenti uguaglianze:

E' dunque Emilio che parla e si ha la classifica : $E < A = B < D < C$

Punteggio proposto: Lingua : 4 punti, risoluzione matematica : 3 punti

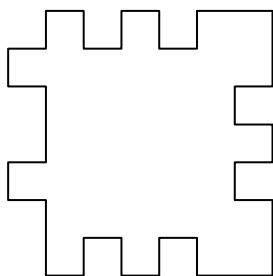
$$A = N+3$$

$$C = D+3$$

$$C = A+5$$

$$B = N+3$$

Esercizio 2: Cubo dentato



Punteggio proposto: -2 pt per un lato errato; -4 pt per due lati errati; 0 pt se sono errati 3 o 4 lati.

Esercizio 3: Circa 1000

Si indicano con x e y i numeri dei pezzi lungo le due dimensioni del rettangolo, il numero totale dei pezzi lungo il perimetro è $x + y + x + y - 4$ per non contare due volte gli angoli. Quindi $x + y = 64$.

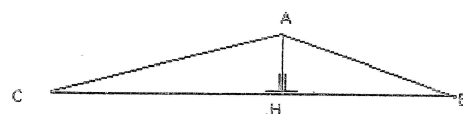
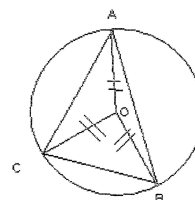
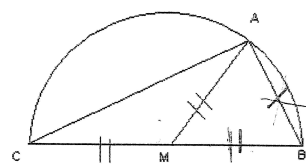
Il numero dei pezzi del puzzle può essere 999 o 1008.

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Punteggio proposto: « $x + y = 64$ » 3 pt ; « $x \times y \approx 1000$ » 3 pt ; risposta senza giustificazione 1 pt.

Esercizio 4: Il mosaico della chiesa

- Se il triangolo è equilatero o isoscele non vi sono evidentemente problemi e rovesciandolo è sempre sovrapponibile con il triangolo originale.
- Se il triangolo è rettangolo, lo consideriamo inscritto in una semicirconferenza. Tagliandolo lungo la sua mediana (condotta dal vertice sulla semicirconferenza al diametro) otterremo due triangoli isosceli, entrambi risovrapponibili.
- Se è acutangolo basta iscriverlo in una circonferenza di centro O e tagliare lungo i segmenti che congiungono O con ciascuno dei vertici del triangolo. Si ottengono così ancora tre triangoli isosceli.
- Se è ottusangolo basta tagliare lungo la sua altezza (condotta internamente ad esso) per ottenere due triangoli rettangoli (ciascuno dei quali riconducibile a due triangoli isosceli). Anche questo può essere quindi rovesciato completamente.



Punteggio a discrezione del correttore. (Tenere conto dei diversi casi esaminati).

Esercizio 5: Una bella combinazione

16 min 45 s = 1005 s La combinazione dei quadranti è la scrittura in base 12 del numero 1004 (= 1005-1) perché la combinazione 0-0-0 occupa già un secondo. Poiché $1004 = 6 \times 12^2 + 11 \times 12 + 8$, **la combinazione dei quadranti è $\boxed{6-11-8}$.**

Punteggio proposto: 1 pt per la conversione « 1005 s » ; 5 pt per « 6-11-9 » ; 7 pt per « 6-11-8 »

Esercizio 6: Platonico

Indichiamo con p il peso di una pallina metallica e con a il peso dell'asticciola metallica. Il peso del tetraedro dà l'equazione $4p + 6a = 76$ e il peso dell'ottaedro dà $6p + 12a = 132$.

Si ottiene il sistema la cui soluzione è $(p; a) = (10; 6)$.

Il peso dell'**icosaedro** è $12p + 30a = 12 \times 10 + 30 \times 6 = 120 + 180 = \mathbf{300\text{ g}}$.

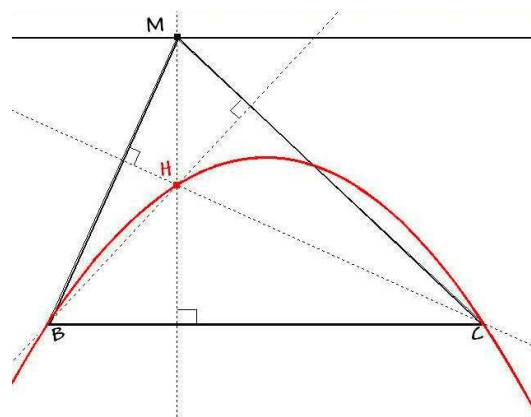
Punteggio proposto: 2 pt per equazione e sistema corretti » ; 2 pt per la soluzione ; 1 pt per il calcolo del peso.

Esercizio 7: A partire dall'altezza

L'ortocentro descrive una parabola.

Questo esercizio potrebbe essere ripreso con un software di disegno geometrico.

Punteggio a discrezione del correttore. (Tenere conto della cura, del posizionamento dei punti, della precisione e del prolungamento della curva oltre B e C).



Esercizio 8: In pista !

In 1 ora, la seggiovia porta 900 sciatori in cima alla pista.

Ciascuno dei 150 sedili (a 2 posti) arriva in cima 3 volte ogni ora. Un viaggio di andata-ritorno di un sedile dura 20 minuti, mentre la sola salita dura 10 minuti.

Punteggio a discrezione del correttore dato il grande numero di metodi possibili.

Esercizio 9: Dov'è l'uscita?

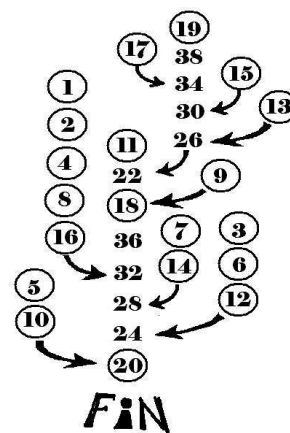
Se si parte da un numero n inferiore o uguale a 20, si troverà il suo percorso nello schema indicato.

Se il numero n è superiore a 20, si può considerare la sua divisione euclidea (classi di resti mod 4) $n = 4q + r$.

- Se $r = 0$, allora $n = 20 + 4(q-5)$ così n sarà ridotto a 20 dopo $(q-5)$ passaggi nel ciclo di destra del diagramma di flusso
- Se $r = 1, r = 2$ o $r = 3$, allora $n = (16 + r) + 4(q-4)$ e n sarà ridotto rispettivamente a 17, 18 o 19 dopo $(q-4)$ passaggi nel ciclo di destra del diagramma di flusso. Si troverà allora il seguito dei calcoli nello schema.

Conclusione : **Qualunque sia il valore iniziale , il valore finale in uscita sarà sempre 20.**

Punteggio proposto: 1 pt per ogni prova ; 1 pt per «l'uscita è sempre 20 » ; 3 pt per spiegazione(dimostrazione)



Esercizio 10: Gira-euro

Quando la moneta A ruota su un'altra moneta e sposta il suo punto di contatto di un angolo α rispetto al centro di questa moneta, **essa gira su se stessa di un angolo doppio 2α .**

Nel suo periplo la moneta A gira di 120° attorno a B, poi di 180° attorno a C, di 60° attorno a D, di 180° attorno a E e di 120° attorno a F.

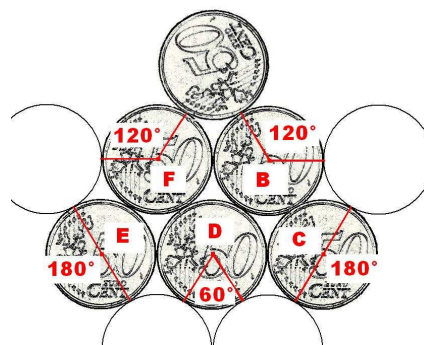
L'angolo della sua rotazione sarà dunque di :

$$2 \times (120^\circ + 180^\circ + 60^\circ + 180^\circ + 120^\circ) = \boxed{1320^\circ}$$

$$= 3 \times 360^\circ + 240^\circ$$

Il tutto in senso orario.

Punteggio proposto: « angolo doppio » 3 pt + calcolo corretto 4pt + disegno con orientazione finale corretta 3 pt.



Esercizio 11: Il b.a.-ba del calcolo

$$(a + b) + ab + (a - b) = 2005 \Leftrightarrow 2a + ab = 2005 \Leftrightarrow a(2 + b) = 2005.$$

I soli divisori di 2005 sono : 1 ; 5 ; 401 ; 2005.

con $a > b > 0$, la sola soluzione è $a = 401$ e $2+b = 5$, quindi : **$a = 401$ e $b = 3$**

Punteggio proposto: 2 pt per « $a(2+b) = 2005$ » ; 1 pt per i divisori di 2005 ; 2 pt per la conclusione.

Esercizio 12: Oracolo a distanza

Applicando il teorema di Pitagora ai quattro triangoli rettangoli, si ottengono le relazioni seguenti :

$$x^2 + z^2 = 39^2 = 1521 \quad ; \quad y^2 + z^2 = 60^2 = 3600$$

$$x^2 + t^2 = 25^2 = 625 \quad ; \quad y^2 + t^2 = MD^2$$

Sommando membro a membro, si ottiene :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 = MD^2 + 5746$$

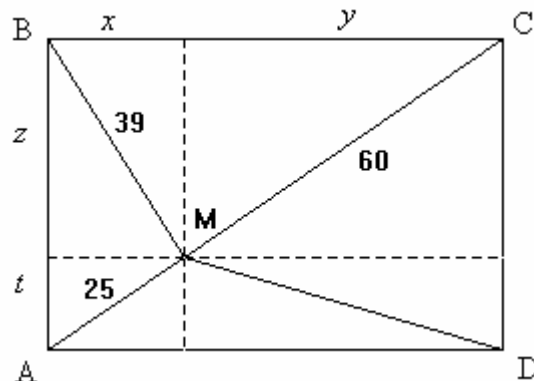
$$2(x^2 + t^2 + y^2 + z^2) = MD^2 + 5746$$

$$2(625 + 3600) = MD^2 + 5746$$

$$MD^2 = 2 \times 4225 - 5746 = 2704 \quad ; \quad MD = \sqrt{2704} = 52$$

La distanza che separa il castello dal villaggio D è di 52 km.

Punteggio proposto: 2 pt per le 4 relazioni pitagoriche; 3 pt per la loro somma; 2 pt per MD^2 e poi MD



Esercizio 13: Lo stomaco nei calcagni

Il percorso più corto è il tragitto AMB dove AM è il segmento di tangente ed MB è l'arco di centro O.

Nel triangolo AMO, per il teorema di Pitagora si ha:

$$AM^2 + OM^2 = AO^2 \Rightarrow AM = \sqrt{75^2 - 45^2} = \sqrt{3600} = 60 \text{ cm.}$$

$$\text{D'altra parte, } \cos(AOM) = \frac{OM}{AO} = \frac{45}{75} = 0,6 \text{ da cui } AOM \approx$$

$$53,13^\circ.$$

$$MOB = 180^\circ - AOM \approx 180^\circ - 53,13^\circ \approx 126,87^\circ.$$

La lunghezza dell'arco MB è circa

$$\frac{126,87}{360} \times 2\pi \times 45 \approx 31,72\pi \approx 99,64 \text{ cm.}$$

La lunghezza del tragitto più corto possibile che la chiocciola può percorrere è circa 160 cm.

Punteggio proposto: 2 pt per aver trovato il cammino più corto (o con un disegno o con una spiegazione); 2 pt per AM; 2 pt per la misura dell'angolo AOM; 1 pt per la misura dell'angolo MOB; 2 pt per la misura dell'arco MB; 1 pt per 160 cm.

