

Matematica senza frontiere

Competizione 13 marzo 2001

NOTA BENE

Per tutti gli esercizi sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni.

Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.

Si terrà conto dell'accuratezza.

Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione.

Attenzione : in presenza di foglio risposta con soluzioni a più esercizi o in presenza di più soluzioni allo stesso esercizio la prova sarà annullata.

Esercizio 1 (7 punti)

Risoluzione da formulare nella lingua prescelta (francese, inglese, spagnolo o tedesco) con un minimo di 30 parole.

Tocca a te

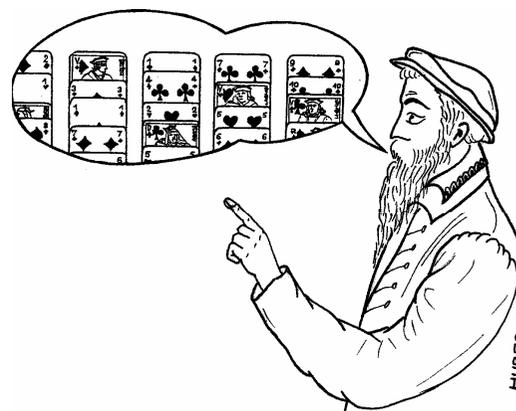
Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.

Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.



Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

Esercizio 2 (5 punti)

Famiglie di quadrati

Piero, dopo aver disegnato un quadrato con lato 6 cm, chiede a sua figlia Lia di dividerlo in nove parti quadrate, ciascuna con il lato che misuri un numero intero di centimetri. Lia individua subito una suddivisione e si domanda se ce ne siano altre.

Sono considerate uguali due suddivisioni formate con gli stessi quadrati disposti diversamente.

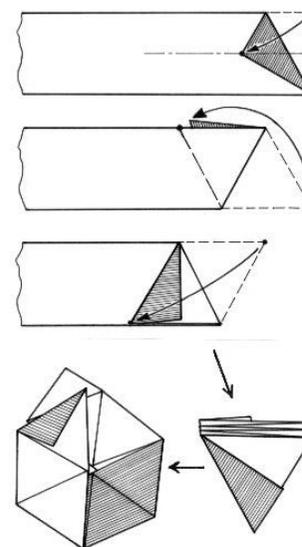
Disegnate tutte le soluzioni possibili.

Esercizio 3 (7 punti)

Esagami

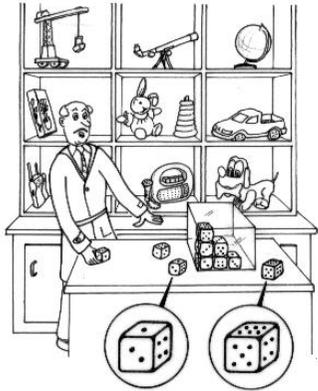
In un libro di origami si trova la piegatura qui riprodotta, realizzata con una striscia di carta rettangolare di $12\sqrt{3}$ per 3,6 cm e che permette di ottenere un esagono regolare. Le due facce della striscia sono di colore diverso.

Costruite l'esagono, poi incollatelo sul foglio-risposta. Calcolate la sua area.



Esercizio 4 (5 punti)

Il pieno di punti



Il signor Vittorio vende dadi nel suo negozio di giocattoli. Ne può sistemare esattamente 60 in una scatola trasparente a forma di parallelepipedo: 5 dadi in lunghezza, 4 in larghezza, 3 in altezza. Nel riempire la scatola sistema i dadi in modo che la somma dei punti visibili sulle sei facce della scatola sia massima. Qual è questa somma? Motivate la risposta.

Esercizio 5 (7 punti)

In parti uguali

Orietta e Giulia devono dividersi equamente un avanzo di torta. Questo avanzo ha la forma di un trapezio rettangolo con basi rispettivamente di 1 dm e di 3 dm e con altezza di 4 dm.

Giulia pretende che le due parti abbiano la stessa area ed anche la stessa forma. Orietta riesce a farlo con un solo taglio rettilineo.

Disegnate l'avanzo di dolce in scala 1/5, poi segnate la linea di taglio. Dimostrate che i due pezzi hanno la stessa area e la stessa forma.

Esercizio 6 (5 punti)

Ma chi l'avrebbe pensato!

Giovanni giocherellando con la calcolatrice programmabile costruisce delle successioni di numeri interi. All'inizio sceglie il primo intero della successione e prosegue in questo modo: se il numero è pari, il successivo è uguale alla sua metà; se il numero è dispari, il successivo si ottiene moltiplicando questo per 3 e aggiungendo poi 1.

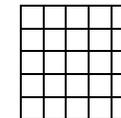
Poi applica di nuovo questo procedimento al risultato ottenuto e così via. Sceglie 1 come numero iniziale e ottiene la prima successione. Poi sceglie 2, poi 3 e così via fino a 25. Ottiene così 25 successioni che presentano una proprietà imprevedibile.

Presentate in modo accorto i calcoli di Giovanni ed enunciate la proprietà osservata. (Questa proprietà non è stata ancora dimostrata per un intero iniziale qualsiasi.)

Esercizio 7 (7 punti)

Giochi di specchi

Intorno allo schema centrale della figura sono disposti 4 specchi magici. Questi specchi riflettono esattamente le caselle nere.



5	4	2	8	
8	9	2		
3		6	3	
7	1	5	4	
7	8	5	2	

	4			5
			3	
4				
	3			8
1	8			

4	3	0	5	9
8	4	7		1
3			7	
9	1	6		
5	8	4		

0	6	7	6	
	2	6	2	
5	6			4
1			2	7
8	3		3	5

Per quanto riguarda, invece, i numeri, entra in gioco la magia. Consideriamo un numero: due specchi lo riflettono immutato mentre gli altri due lo cambiano sostituendolo uno col numero precedente e l'altro con quello successivo.

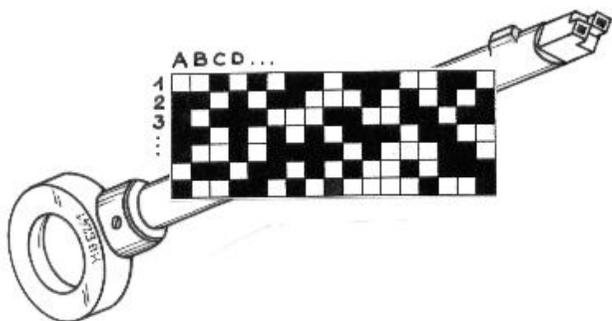
Gli specchi si comportano fedelmente o infedelmente a seconda della casella dello schema centrale.

Ricostruite sul foglio-risposta l'immagine che si ottiene nello schema vuoto della figura.

Esercizio 8 (5 punti)

Codice segreto

Per comunicare tramite Internet Alice e Roberto codificano e decodificano i loro messaggi con la seguente chiave formata da pixel neri e bianchi.

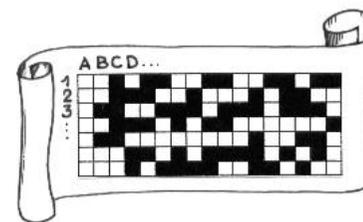


Per codificare e decodificare il messaggio che ha la stessa dimensione della chiave lo si sovrappone alla chiave stessa e per ogni coppia di pixel con le stesse coordinate si applica la seguente operazione:



due pixel dello stesso colore danno un pixel nero, due pixel di colore diverso danno un pixel bianco.

Ecco il messaggio in codice mandato da Roberto ad Alice



Disegnate il reticolo decodificato. Qual è il messaggio? (Questo metodo di crittografia è realmente usato.)

Esercizio 9 (7 punti)

Ciclopedia

Ben osserva Emilio che si esercita con un velocipede. Ben traccia mentalmente la traiettoria del punto A della ruota anteriore del velocipede quando questa compie un giro e mezzo senza strisciare. La ruota ha il diametro di 150 cm. All'inizio il punto A tocca il suolo.



Rappresentate in scala 1/30 la posizione della ruota e del punto A ogni ottavo di giro; poi tracciate la traiettoria del punto A.

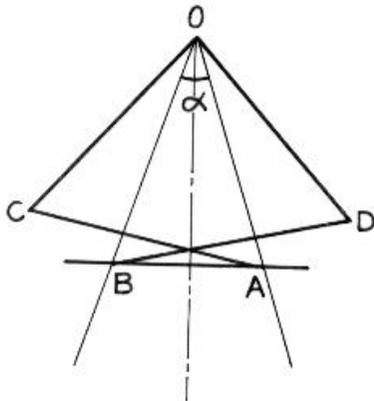
Esercizio 11 (5 punti) solo per la classe terza

Esercizio 10 (10 punti)

La stecchinatura

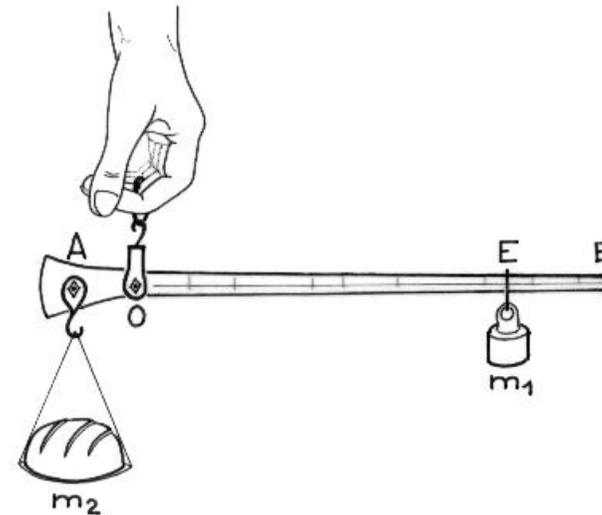
Eric ha un metodo per visualizzare la bisettrice di un angolo α .

Ha a disposizione 5 stuzzicadenti di uguale lunghezza e se ne serve per visualizzare la bisettrice di un angolo di misura inferiore a 60° . Inizia sistemando 3 stuzzicadenti, poi ne sposta 2 e, infine, arriva alla disposizione illustrata nella figura.



Descrivete i passaggi compiuti da Eric illustrandoli con figure. Lo spessore degli stuzzicadenti è trascurabile.

Graduate l'asta



La stadera è composta da un'asta graduata tra 0 e B ed una massa m_1 denominata "romano" che può scorrere su OB.

Per misurare una massa incognita di m_2 grammi la si appende in A e tenendo la stadera sospesa in O si sposta il romano tra O e B fino ad individuare la posizione di equilibrio in E.

Si ha, quindi, la relazione $OA \times m_2 = OE \times m_1$.

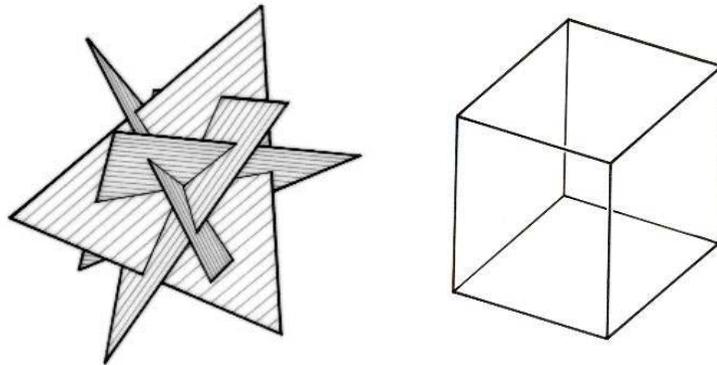
Si sa che $AB = 24$ cm, $m_1 = 500$ g ; con una massa $m_2 = 2$ Kg la stadera è in equilibrio se $AE = 20$ cm.

Determinate la posizione di O su AB; poi graduate l'asta della stadera di 250 g in 250 g.

Esercizio 12 (7 punti) solo per la classe terza

Geometria ed arte moderna

Il dodecapunte disegnato è costituito da 4 triangoli equilateri uguali che si intersecano a due a due. E' stato ottenuto a partire da un cubo: i vertici dei triangoli sono infatti i punti medi degli spigoli del cubo. Partendo da un cubo simile a quello rappresentato disegnate a tratto continuo solo i lati dei 4 triangoli del dodecapunte usando un colore diverso per ogni triangolo.



Esercizio 13 (10 punti) solo per la classe terza

Geometria e petrolio

L'emiro Abel possiede una campo di petrolio quadrato. Decide di regalarne una parte ai suoi 3 figli.

Per ottenerla ognuno di loro dovrà mettersi su uno dei lati del campo e riceveranno in dono il triangolo di terreno determinato dalle loro tre posizioni.

Come devono disporsi per ottenere la massima area possibile?
Motivate la risposta.