Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classe prima
Competizione 7 marzo 2023
Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) **Decorazione di una vetrata**

Vari possono essere gli approcci; se ne riportano alcuni.

1) $A_B = \pi \cdot (2r)^2 cm^2 - (4 \cdot \pi r^2 - 400) cm^2 = 400\ cm^2$.

Oppure

2) Denominato r il raggio dei cerchi interni, il raggio del cerchio esterno è R = 2r
Si considera, per semplicità un solo quadrante.
Area di un quadrante cerchio esterno: $\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\pi(2r)^2$

Area di uno spicchio verde: Area settore circolare – area triangolo rettangolo = $2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$

L'area di tutta la zona verde è quindi $4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = 400$, da cui $r^2 = \frac{200}{\pi - 2}$

Allora l'area della zona blu di un quadrante è data da:
$\frac{1}{4}A_B = \frac{1}{4}\pi \cdot (2r)^2 - \left(\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2\right)$ da cui $\frac{1}{4}\pi \cdot 4 \cdot \frac{200}{\pi - 2} - \left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{200}{\pi - 2} + \frac{200}{\pi - 2}\right) = \frac{\pi - 2}{2} \cdot \frac{200}{\pi - 2}$
e, quindi, $A_B = 4 \cdot 100 = 400\ cm^2$.

Oppure

3) Denominato r il raggio del cerchio del rosone, si procede calcolando, in funzione di r, l'area delle superfici colorate in blu e in verde per sottrazione di aree di figure geometriche facilmente riconoscibili:

$A_V = 8\left(\frac{1}{4}\pi\ \frac{r^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{4}\right)$ $\qquad A_V = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

$A_B = 4\left(\frac{1}{4}\pi\, r^2 - \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right)$ $\qquad A_B = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Dall'uguaglianza di A_V e A_B si deduce che $A_B = 400\ cm^2$.

Esercizio n. 2 (5 punti) **Come vincere un gelato**

Indicati con *m* e *n* i due numeri pensati da Piero, la relazione tra i due numeri è $3m = 2n$ → m deve essere pari e, quindi, divisibile per 2

$n = \frac{3}{2}m \qquad m + n = m + \frac{3}{2}m \qquad m + n = \frac{5}{2}m$ → la somma è multipla di 5.

Oppure, anche, da $n = \frac{3}{2}m$ si ha che *m* deve essere pari. Ne segue che $m + n = 2k + 3k \qquad m + n = 5K$ → la somma è multipla di 5.

La vincitrice è Donata per le motivazioni sopra esposte.

Si può osservare, inoltre, che le affermazioni di Elisa e di Benedetta implicano quella di Aldo per cui sono da scartare.
L'affermazione di Carlo è falsificata da m=2 e n=3 e quindi può essere vera solo quella di Donata.

Esercizio n. 3 (10 punti) **La crisi cambia le abitudini di spesa?**

	Cambiamento abitudini		
Discount	si	no	totali
sì	325	25	350
no	50	100	150
totali	375	125	500

1) P = 350/500
2) N = 50
3) P = 25/350
4) P = 100/500

La risposta è SI perché 20% > 15%

Esercizio n. 4 (7 punti) **Dobble fai da te**

a) Per semplicità si indicano i simboli con le lettere dell'alfabeto. Si suppone di avere una carta con tre simboli (A, B, C); una seconda carta dovrà avere un simbolo della prima (per esempio A) e due simboli nuovi (D, E); una terza carta dovrà avere un simbolo in comune con la prima che non sia stato usato già due volte (per esempio B), un simbolo della seconda carta (per esempio D) e un nuovo simbolo (F). Resta un'ultima carta che avrà i simboli C, E, F. In sintesi:

- prima carta: A, B, C
- seconda carta: A, D, E
- terza carta: B, D, F
- quarta carta: C, E, F

Quindi **4 carte** e **6 simboli**.

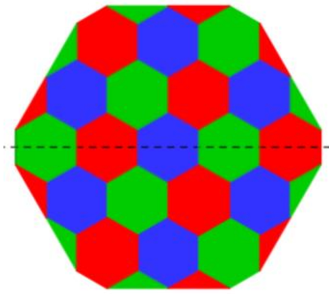
b) Si ottiene ragionando come nel punto precedente:

- prima carta: A, B, C, D
- seconda carta: A, E, F, G
- terza carta: B, E, H, I
- quarta carta: C, F, H, J
- quinta carta: D, G, I, J

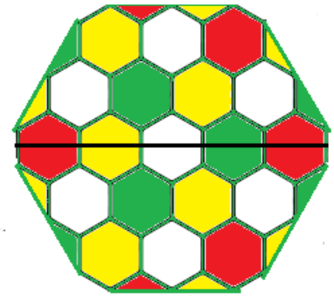
Quindi **5 carte** e **10 simboli**.

Esercizio n. 5 (5 punti) **Il gazebo**

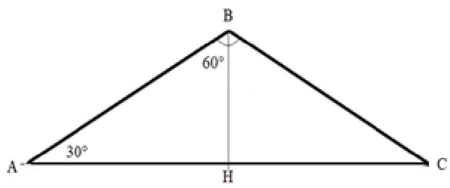
Il numero minimo di colori è 3, come nell'esempio riportato in figura:



Con riferimento alla Tabella di valutazione si riporta la seguente figura a illustrazione degli errori possibili citati: rispetta la simmetria ma non il numero minimo di colori (4 in figura).



Per calcolare il perimetro occorre lavorare sui tagli delle piastrelle; come si vede, infatti, in figura:



BH = 0,25 m e AH = $0{,}25\sqrt{3}$ m (dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH).

AC = $0{,}5\sqrt{3}$ m.

Ci sono 12 pezzetti di piastrelle di lato $0{,}5\sqrt{3}$ m e 6 piastrelle di lato 0,5 m, da cui il perimetro del pavimento del gazebo è:

$2p = 12 \cdot 0{,}5\sqrt{3}$ m + $6 \cdot 0{,}5$ m $2p = (6 \cdot \sqrt{3}+3)$ m $2p \approx 13{,}39$ m.

Esercizio n. 6 (10 punti) **Il compleanno di Sofia**

Poiché in un anno (non bisestile) i giorni sono 365 e la divisione di 365 per il numero 7 (giorni della settimana) ha come resto 1, il 7 maggio 2023 cadrà nel giorno della settimana successivo a quello dell'anno precedente.

Nel caso di anno bisestile i giorni sono 366 e il resto della divisione per 7 è 2, quindi, i compleanni, dal 1° marzo al 28 febbraio dell'anno successivo, slittano di 2 giorni.
Il 7 maggio 2019 è caduto nel giorno martedì, mentre il 7 maggio 2020 è caduto nel giorno giovedì.

Tutti gli anni successivi al 2020 multipli di 4 sono bisestili, 2024 - 2028 e così via, per cui il prossimo sabato sarà il 7 maggio 2033.

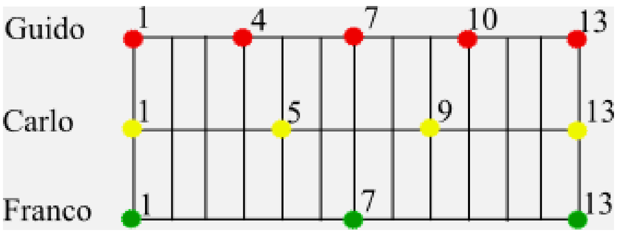
Sofia compirà 18 anni la domenica 7 maggio 2034.

Anno	Giorno della
2022	**sabato**
2023 (+1)	domenica
2024 (+2)	martedì
2025 (+1)	mercoledì
2026 (+1)	giovedì
2027 (+1)	venerdì
2028 (+2)	domenica
2029 (+1)	lunedì
2030 (+1)	martedì
2031 (+1)	mercoledì
2032 (+2)	venerdì
2033 (+1)	**Sabato (età 17 anni)**

Esercizio n. 7 (7 punti) **Cene in compagnia**

a) È sufficiente calcolare il minimo comune multiplo dei numeri 3, 4, 6.
Stabilito che questo è 12, l'evento si verificherà 12 giorni dopo il 1° agosto, cioè il 13 agosto.

Se, tuttavia, non si riesce a prevedere questo ragionamento, si può seguire quello descritto nello schema sottostante che si spiega da sé:



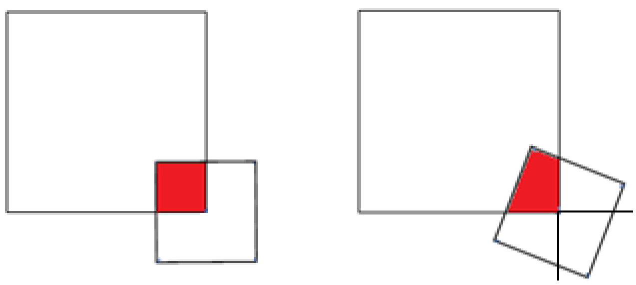
b) Per rispondere a questo quesito, può ancora essere utile lo schema raffigurato, ma ci vuole un briciolo di immaginazione.
Col primo ragionamento, invece, si conclude rapidamente che non esiste un tale giorno.
Considerato, infatti, che i multipli comuni a 3 e 4 sono del tipo 12 k, dove k è un intero positivo qualsiasi e considerato che questi numeri sono anche multipli di 6, si desume che nei giorni in cui sono presenti Guido e Carlo è anche presente Franco.

Esercizio n. 8 (5 punti) **Quadrato su quadrato**

Il quadrato minore, purché abbia il centro coincidente con un vertice del quadrato grande, lo intersecherà nella sua quarta parte.

L'intersezione dei due quadrati è la quarta parte del quadrato piccolo che avrà, pertanto, area di 36 cm^2.
Il lato del quadrato minore misura 6 cm e quello del quadrato maggiore 12 cm.

Come si evince dalla figura sottostante il posizionamento del quadrato piccolo non è unico:



Il posizionamento del quadrato piccolo con lati paralleli a quello grande fornisce la soluzione, ma la parte sostanziale è che ogni rotazione del quadrato piccolo attorno al suo centro darà sempre la stessa area di intersezione.

Esercizio n. 9 (10 punti) **Più libri per tutti**

Caso a)
Conviene riempire il più possibile ciascun pacco per diminuire le spese di spedizione. Per preparare e spedire un pacco con 4 libri sono necessari 24 € per le copie e 4,88 € per spedire il pacco (4 € + IVA al 22%); in totale ciascun pacco "costa" 28,88 €. Per individuare il numero di pacchi che possono essere spediti con queste condizioni si calcola:

$$\frac{2000€ - 5€}{28{,}88\ €/pacco} \approx 69 \text{ pacchi}$$

(il risultato esatto eccede di poco 69 e deve essere arrotondato per difetto perché non bisogna superare i 2 000 €).
In totale si hanno quindi **276 libri, suddivisi in 69 pacchi da 4 libri ciascuno**.

Caso b)
Il multiplo di 8 inferiore a 276 e a esso più vicino è **272**; a ciascuna biblioteca vanno quindi **34 libri, suddivisi in 8 pacchi da 4 libri e un pacco da soli 2 libri**. Si verifica facilmente che non vengono superati i 2 000 € del premio.

Esercizio n. 10 (7 punti) **44 gatti in fila per 3 col resto di 2**

Si riportano due procedimenti risolutori.

A) Se N è il numero di soldati è evidente che il numero N – 2 è divisibile sia per 4 sia per 5, per cui è divisibile per 20.
Esiste, perciò, un numero naturale k, non nullo, tale che N – 2 = 20k.
A sua volta, N deve essere un multiplo di 6. Quindi deve esistere un numero naturale h, non nullo, tale che N = 6h.
Dal confronto delle due relazioni segue:
$h = \frac{20k+2}{6}$ ossia: $h = \frac{10k+1}{3}$.
Si tratta allora di trovare il più piccolo valore di k per il quale 10k + 1 è divisibile per 3.
Ora, per k = 1, 10k + 1 = 11 non è divisibile per 3.
Per k = 2, 10k + 1 = 21 è divisibile per 3 e, in tal caso, si ha: h = 7 e N = 42.
I soldati sono, pertanto, in numero di 42, disposti in 7 file.

B) Il numero N di soldati deve essere un multiplo di 6, ossia N = 6m, dove m è un numero naturale non nullo. Si tratta allora di vedere qual è il più piccolo valore di m per il quale 6m, diviso per 4 dà resto 2 e diviso per 5, dà ancora resto 2.

La seguente tabella fornisce il risultato.

m	N = 6m	Resto della divisione di N per 4	Resto della divisione di N per 5	E' accettabile?
1	6	2	1	NO
2	12	0	2	NO
3	18	2	3	NO
4	24	0	4	NO
5	30	2	0	NO
6	36	0	1	NO
7	**42**	2	2	SI

La medesima conclusione del primo procedimento.

Oppure, semplicemente:

Le file da 5 sono almeno 3 (altrimenti ci sarebbero 12 soldati e non varrebbe la condizione sulle file da 4).
Aggiungendo i due soldati rimasti a 2 delle file da 5 si ottengono 2 file da 6, ne segue che il totale dei soldati disposti in 5 file è un multilpo di 6. Il mcm è 30 e il numero di soldati è 42 (che verifica la condizione sulle file da 4).