Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classe prima

Competizione 26 febbraio 2019

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) **Il biglietto vincente**

Poiché le etichette non corrispondono al contenuto, ci potrebbero essere solo questi contenuti (in euro):

A	10 + 20	20 + 20
B	20 + 20	10 + 10
C	10 +10	10 + 20

Se estraggo da A una sola banconota non posso dire con certezza il contenuto delle tre scatole. Se estraggo, infatti, una banconota da 10 €, posso dedurre A = 30, C = 20 e B = 40 ma se estraessi 20 €, la soluzione non sarebbe determinabile.

Analogamente, se estraessi da C una sola banconota e questa fosse 20 €, determinerei C= 30, B = 20, A= 40 ma nel caso di estrazione di banconota da 10 i contenuti risulterebbero indeterminati.

Consideriamo, invece, la scatola B. Si suppone di estrarre un biglietto da B; se questo è da 10 € si deduce che B contiene 20 €, C ne contiene 30 e A 40.
Se, invece, si estrae un biglietto da 20 €, si deduce che B contiene 40 €, di conseguenza A ne contiene 30 e C 20.

In sintesi, quindi, la scatola da scegliere non può che essere la B perché la scelta di altra scatola comporterebbe delle situazioni indeterminate.

Esercizio n. 2 (5 punti) **I biglietti da visita**

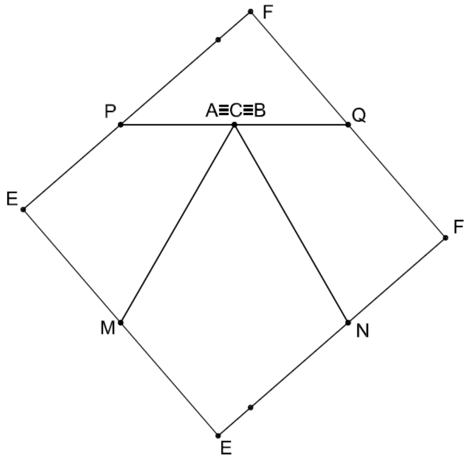
20 AB + 2AD =170 cm ➔ AD = 85 cm - 10 AB

2 AB + 20 AD = 116 cm ➔ AB + 10 AD = 58 cm

➔ AD = 5 cm AB = 8 cm

Esercizio n. 3 (10 punti) **Ruota, ruota!**

Si compone il seguente quadrato:



Una possibilità per le tre rotazioni è:

a) APEM ruota, in verso orario di 180°, attorno al punto M in modo che A coincida con C
b) NPB ruota, in verso antiorario di 180°, attorno al punto N in modo che B coincida con C
c) PFQ ruota, in verso antiorario di 180° attorno al punto Q.

Esercizio n. 4 (7 punti) **La moltiplicazione delle facce**

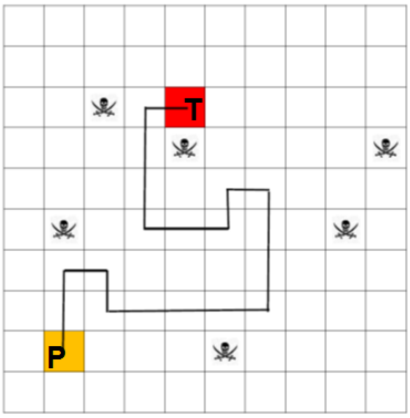
Per entrambe le domande, può essere utile schematizzare tutti gli esiti possibili con la seguente tabella a doppia entrata:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a) Si ha che $\frac{1}{12}$ corrisponde a 3 casi su 36; l'unico prodotto che può presentarsi in tre casi diversi è il 4.

b) Pierino sbaglia; infatti, sia il prodotto 6 sia il prodotto 12 possono presentarsi in 4 casi diversi, quindi la probabilità è la stessa (ed è pari a $\frac{1}{9}$).

Esercizio n. 5 (5 punti) **A caccia del tesoro**



Esercizio n. 6 (10 punti) **Ritorno in compagnia**

La moglie ha camminato 30 minuti in meno del solito; dato che ha velocità costante significa che ha camminato 15 minuti in meno verso la stazione e 15 minuti in meno verso casa e perciò ha incontrato Mario alle 17:25.

Da ciò si ricava che il marito ha camminato da solo per 25 minuti.

Esercizio n. 7 (7 punti) **Pari o dispari?**

Ad esempio, se i tre numeri interi sono 5, 4 e 13, le differenze sono:
13 - 5 = 8   13 - 4 = 9   5 - 4 = 1
Il prodotto delle differenze è 72.

Continuando con varie terne si può notare che:

- se i numeri sono tutti pari lo sono anche le loro differenze e, quindi, il loro prodotto sarà pari
- se i numeri sono tutti dispari le loro differenze sono pari e, quindi, il loro prodotto sarà pari
- se alcuni numeri sono dispari una delle loro differenze è pari e, quindi, il loro prodotto sarà pari.

Esercizio n. 8 (5 punti) **Ecco fatto**

100	**8**	**8**	**18**	**28**	**38**

Ogni altra scelta darebbe un totale superiore a 100.

Esercizio n. 9 (10 punti) **La parete dello sceicco**

Lo sceicco spende meno con la formazione quadrata poiché in questo modo occorrono meno monete per rivestire la parete.

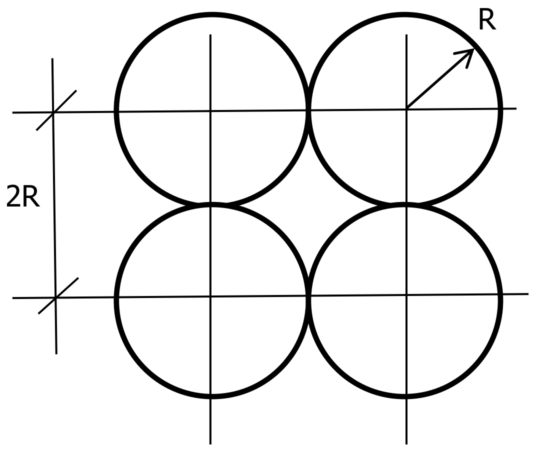
1° caso: Formazione “quadrata” (disposizione a 90°)

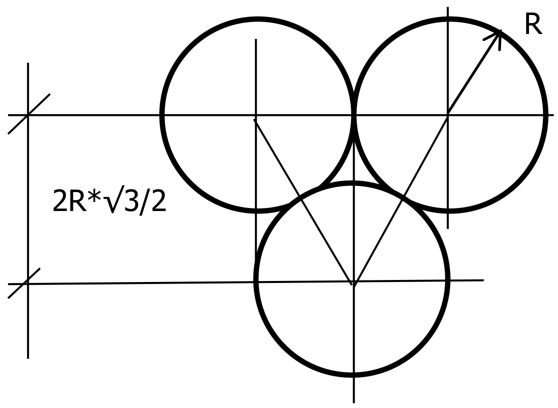
Per semplicità denominiamo righe le file di monete in orizzontale e colonne quelle in verticale.

Ogni riga contiene 600 cm **:** 3 cm = 200 monete.
Le righe sono 300 cm **:** 3 cm = 100.
Pertanto le monete sono 200 •100 = 20 000.

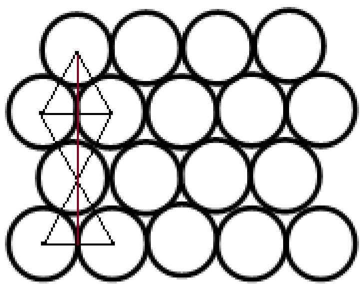
2° caso: Formazione “triangolare” (disposizione a 60°)

La prima riga contiene 600 cm **:** 3 cm = 200 monete.
La seconda fila ne contiene una di meno, cioè 199.
La terza riga 200, la quarta 199, e così via…..





Ma quante sono le righe?



Dalla generalizzazione della parziale sezione di parete rappresentata a lato si può dedurre che il numero di righe è superiore di 1 al numero delle altezze dei triangoli equilateri evidenziati in figura.

Si nota inoltre che si devono considerare due raggi di 1,5 cm, per un totale di 3 cm, per la completa copertura in verticale della parete.

Quindi le altezze dei triangoli sono:

$$297cm : 3\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm \sim 114$$

e di conseguenza le righe sono115 di cui 58 di 200 monete e 57 di 199 per un totale di 22 943 monete.

Conviene la formazione “quadrata”!

Approfondimento

Come si vede dal confronto con il 1°caso la “densità” dei cerchi è sempre maggiore nella formazione triangolare ma l’influenza degli spazi vuoti dipende dal rapporto C/S fra il diametro dei cerchi e le dimensioni della superficie rettangolare di contenimento e, precisamente, diminuisce al diminuire di tale rapporto.
Esiste anche una soluzione generale, inerente appunto il calcolo del rapporto V/P (vuoto/pieno) in una disposizione quadrata e in una disposizione triangolare su una superficie infinita (o “abbastanza grande” rispetto alle dimensioni del cerchio per cui si possano trascurare gli sfridi sui bordi), con calcolo delle aree dei quadrangoli o triangoli curvilinei che si formano fra i cerchi. In tal caso sarebbe possibile calcolare il limite cui tende il rapporto Q/T fra le densità nei due casi. Sarebbe anche interessante calcolare per quale valore del rapporto C/S si ha l’inversione del rapporto Q/T. Questo però richiede lo studio di una funzione, peraltro discontinua o al più solo macroscopicamente continua (per C/S molto piccolo) e potrebbe essere un esercizio per la maturità scientifica.

Esercizio n. 10 (7 punti) **Composizione di cubi**

Se si osserva che 91 = 13 x 7 e 77 = 11 x 7, si deduce che, levando la faccia superiore e quella laterale, si ottiene un parallelepipedo formato da 12 x 11 x 7 cubetti.

Si leva ora la faccia posteriore e il parallelepipedo si riduce a uno formato da 12 x 11 x 6 = **792 cubetti**.

(Il parallelepipedo iniziale è composto di 1092 cubetti).