Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classe prima

Competizione 7 marzo 2017

Proposta di soluzioni

Esercizio 1 (7 punti) **Una festa particolare**

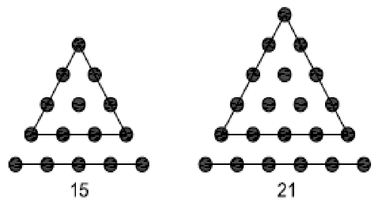
20 500 g : 365 g = 56 a + 60 g

Nel 2016 Laura compie 56 anni; è quindi nata nel 1960 e il 10 ottobre compirebbe 56 anni e 60 giorni se tutti gli anni fossero di 365 giorni; occorre, però, considerare la durata dell'anno bisestile di 366 giorni e calcolare il numero di anni bisestili dal 1960 al 2016: 14.

Dai 60 giorni sottratti 14 ne restano 46. Tale considerazione porta alla conclusione che il compleanno di Laura è il 25 agosto**.**

Esercizio n. 2 (5 punti) **Numeri triangolari**

Qui a fianco sono riportati il quinto ed il sesto numero triangolare:



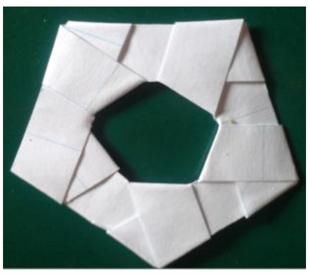
Il numero triangolare che occupa il 18-esimo posto si può ricavare osservando che la sequenza dei numeri triangolari (a partire dal numero 1) è la seguente:
1 ; 1+2 ; 1+2+3 ; 1+2+3+4 ; …….

Quindi il 18-esimo numero è dato dalla somma 1+2+3+4+……+17+18 = 171

Questa somma può anche essere espressa come:
(1+18)+(2+17)+(3+16)+…….(9+10) = (1+18) x 9 S = 171

Generalizzando, l'ennesimo numero triangolare richiesto è uguale a: $\frac{n(n+1)}{2}$

Esercizio n. 3 (10 punti) **Piega su piega**



Si ottiene un decagono non regolare; se la costruzione è effettuata con cura si notano per la figura interna cinque lati, circa uguali tra loro, alternati ad altrettanti di lunghezza decisamente minore.

Esercizio n. 4 (7 punti) **Area che cambia**

1) L'area della fig.1 è $A_1 = (12 \cdot 2 \cdot 4 - 2^2 \cdot 4)$ cm^2 $A_1 = 80$ cm^2

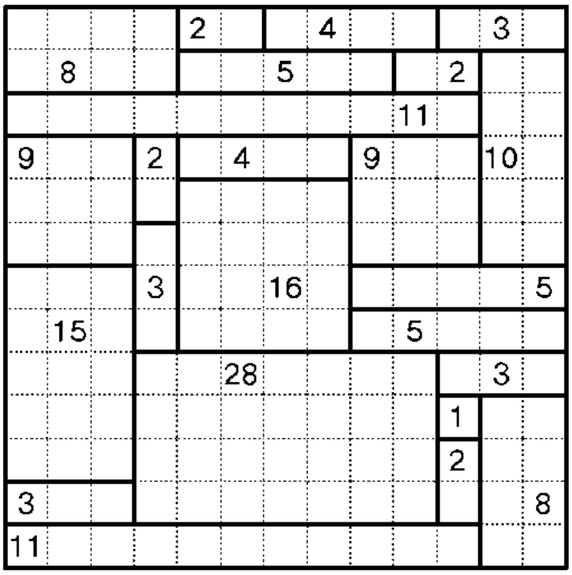
2) Nella fig.2 le strisce hanno in comune quattro parallelogrammi di base $2\sqrt{2}$ cm e altezza 2 cm;
perciò $A_2 = (12 \cdot 2 \cdot 4 - 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 4)$ cm^2 $A_2 = (96 - 16\sqrt{2})$ cm^2 $\approx 73{,}37$ cm^2
La zona di vetro coperta, pertanto, diminuisce; la diminuzione è di: $16\sqrt{2} - 16 \approx 6{,}63$ cm^2

3) Se le due strisce ruotano come indicato, la parte comune alle quattro strisce è sempre costituita da quattro parallelogrammi di altezza 2 cm e base che diminuisce passando da $2\sqrt{2}$ cm a 2 cm quindi la zona coperta ritorna a essere di 80 cm^2.

Esercizio n. 5 (5 punti) **Tutti seduti**

Se n è il numero di sedie per fila, 9n è il numero totale di sedie.
Nella prima conferenza ne sono occupate i 2/3, cioè 6n e nella seconda sono previste come presenze 3/4 cioè 4,5 file occupate.
Bisognerà, quindi, lasciare 5 file di sedie nella sala affinché tutti i partecipanti possano essere seduti durante la seconda conferenza.

Esercizio n. 6 (10 punti) **Shikaku**



Aiuta osservare che la casella 1 è già definita e che a 11 deve corrispondere un lungo rettangolo orizzontale…..poi continuare riflettendo su 8 in basso a destra e così via.

Esercizio n. 7 (7 punti) **Un logo matematico**

Dalle simmetrie evidenti nella figura si ricava che le curve divisorie sono 4 archi di circonferenza di raggio 10 cm (la metà del raggio della circonferenza esterna).

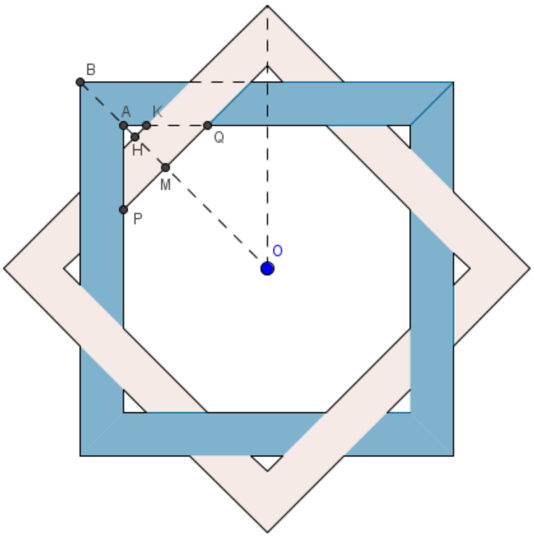
Ciascuna delle 4 parti in cui è diviso il simbolo è costituita da un quarto di circonferenza di raggio 20 cm e da due semicirconferenze di raggio 10 cm.

A questo punto è sufficiente effettuare i calcoli:

$$2p = \left(\frac{20 \cdot 2 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 2 \cdot \pi}{2}\right) cm \quad 2p = (10\pi + 20\pi)\ cm$$

$$2p \approx \mathbf{94,2\ cm}$$

Esercizio n. 8 (5 punti) **Al villaggio Crespi**



L'ottagono che si ottiene è regolare (come facilmente si può dimostrare considerando la congruità dei triangoli) di lato PQ e apotema OM = 1m

AB = $0,3\sqrt{2}$
OB = $1,3\sqrt{2}$
PQ = 2 AM
AM = OB – AB – OM

Pertanto l'Area dell'ottagono è pari a 8 (PQ • OM)/2

Area ≈ 3,31 m^2
Ricavabile anche come differenza di aree.

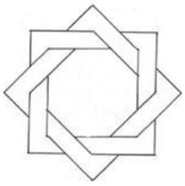
L'esercizio ben si presta in classe a una generalizzazione non assegnando la differenza (x) della misura tra lato esterno e interno della cornice.

Tenendo conto che l'ottagono che si ottiene congiungendo i vertici dei due quadrati esterni è regolare e che quello interno è anch'esso regolare in quanto simile a quello esterno, l'interno si può considerare formato da 8 triangoli isosceli di altezza L/2 e base L($\sqrt{2}$ - 1), per cui si ottiene l'area come

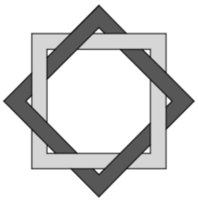
$4\,\frac{L^2}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)$ e per L = 2m Area ≈ 3,31 m^2

Interessante è osservare che l'area è indipendente dal valore di x, mentre ciò che varia è la configurazione dell'intreccio delle cornici:

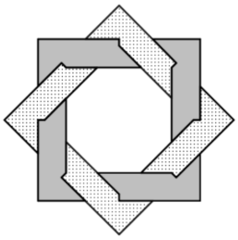
A) con x = ($\sqrt{2}$-1), cioè 0,4142
significa che il quadrato interno ha diagonale pari al lato del quadrato esterno e ciò si ha con questa configurazione



B) con x< 0,4142 (come nel caso di x = 0,3)

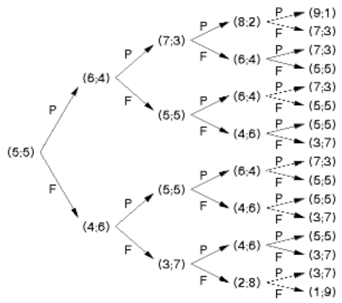


C) con x> 0,4142



che è il caso del rosone del Villaggio Crespi.

Esercizio n. 9 (10 punti) Testa o croce



Con la rappresentazione a albero sottostante si raffigurano i casi possibili in cui con P è indicata la vittoria di Piera e con F quella di Francesco.

Si rileva, così, che Francesco ha 5 possibilità su 16 di ottenere più cioccolatini di Piera, cioè la sua probabilità di vittoria è: **P = 5/16 P ≈ 31%.**

.

Si potrebbe ragionare anche considerando tutti i 16 possibili risultati delle quattro partite:

TTTT – CTTT – TCTT – TTCT – TTTC quindi la probabilità di vittoria di Francesco è **5/16**

(Passaggio non richiesto) CCCC – TCCC – CTCC – CCTC – CCCT probabilità di vittoria di Piera: 5/16

(Passaggio non richiesto) CCTT – TTCC – CTTC – TCCT – CTCT – TCTC probabilità di pareggio: 6/16

Esercizio n. 10 (7 punti) La serranda

Ogni giro richiede 4 secondi.
Ad ogni giro il diametro di avvolgimento aumenta di 2 cm (con l'approssimazione di cui sopra).

1° giro: $L_1 = 5\ \pi$ cm $L_1 = 15{,}70$ cm (5 cm = L diametro albero, pari al diametro interno dell'avvolgimento)

2° giro: $L_2 = 7\ \pi$ cm = 22,00 cm totale dopo il 2° giro = 37,70 cm (5 cm + 2 spessori avvolgibile)

3° giro: $L_3 = 9\ \pi$ cm = 28,27 cm totale dopo il 3° giro = 65,97 cm (il precedente + 2 spessori avvolgibile)

4° giro: $L_4 = 11\ \pi$ cm = 34,56 cm totale dopo il 4° giro = 100,53 cm (c.s.)

5° giro: $L_5 = 13\ \pi$ cm = 40,84 cm totale dopo il 5° giro = 141,37 cm (c.s.)

Il 6° giro non viene completato. A 150 cm mancano (150 - 141,37) cm = 8,63 cm.

Poiché il 6° giro sarebbe di 15 π cm = 47,12 cm, il tratto mancante di 8,63 cm si compie in 8,63 **:** 47,12 = 0,1831 giri, cioè 0,1831 x 4 s = 0,73 secondi.

Pertanto il tempo totale è di 5 giri x 4 s + 0,73 s pari a **20,73 secondi**.