Mathématiques SANS Frontières

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze
Accoglienza 2024 – 2025

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 7 punti) **Tic Tac**

Jean-Noël per prima cosa dovrà far partire l'orologio che c'è nello chalet utilizzando le sue batterie nuove, mettendolo su 0.00.

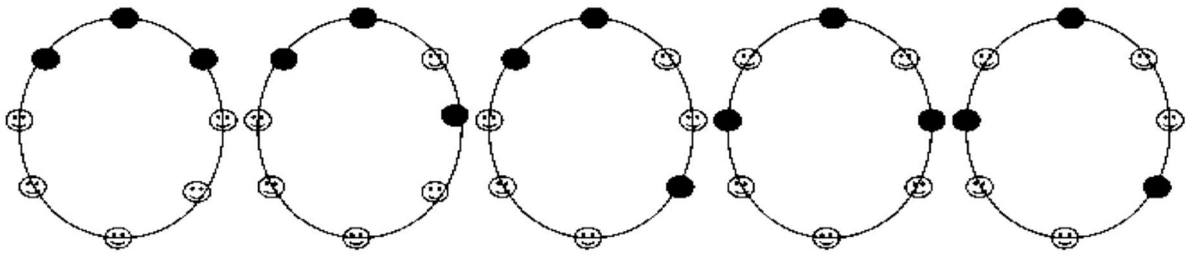
Immediatamente salirà sulla collina, leggerà velocemente l'ora sul campanile, ridiscenderà.

Verificato sull'orologio dello chalet il tempo trascorso, lo dividerà per tre e, infine, lo aggiungerà all'ora letta sul campanile.

E' evidente che ci sono alcuni secondi persi durante le varie operazioni (partenza, lettura dell'ora sul campanile, arrivo, divisione e sistemazione delle ore sull'orologio) che si considerano trascurabili.

Esercizio n. 2 (5 punti) Collana

Compresa la soluzione dell'esempio che non è, però valutata:



Esercizio n. 3 (7 punti) Quadrato di tasti

Si denomina n il tasto del quadrato premuto per primo in alto a sinistra. (Denominando n un altro tasto il percorso sarà diverso ma le conclusioni analoghe.)

Si hanno 4 possibilità con i numeri delle righe della calcolatrice, tranne quella con lo zero:

n	n+1
n-3	n-2

n+1	n+2
n	n-3

n-2	n-3
n+1	n

n-3	n
n-2	n+1

La somma a – b + c - d delle quattro somme dà sempre come risultato zero per cui si deduce che è divisibile per 11.

$$n - (n + 1) + (n - 2) - (n - 3) = 0$$

$$(n + 1) - (n - 2) + (n - 3) - n = 0$$

$$(n - 2) - (n - 3) + n - (n + 1) = 0$$

$$(n - 3) - n + (n + 1) - (n - 2) = 0$$

Perciò l'affermazione di Laura è vera qualunque siano i 4 tasti scelti.

Approfondimento

Dimostrazione del criterio di divisibilità per 11.

Sia **abcd** un numero a 4 cifre (la regola vale anche con numeri con più di quattro cifre).

Se **a – b + c – d = 0**, allora abcd è divisibile per 11

Una possibile dimostrazione:

abcd = 1000 a + 100 b + 10 c + d

= 1001 a- a + 99 b + b + 11 c - c + d

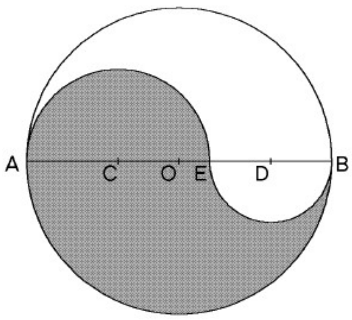
= 11 x (91 a + 9 b + c) - (a - b + c - d)

Se **a – b + c – d = 0**, allora **abcd** è divisibile per 11.

Esercizio n. 4 (5 punti) Formidabile

Il percorso lungo una delle semicirconferenze di raggio unitario misura πu, su quella di raggio doppio 2π u, poi 3π u fino a 6π u.
Qualunque sia il percorso che effettua si verifica che la lunghezza è sempre 6π u.

Esercizio n. 5 (7 punti) Il lato oscuro



Ponendo OA=OB=R, CA=r si deduce che

$$DB = \frac{AB - 2CA}{2} = R - r$$

Area della parte scura:

$$\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi (r-x)^2}{2} = \pi R r$$

Area della parte chiara:

$$\pi R^2 - area\ della\ parte\ scura = \pi R^2 - \pi R r$$

L'area della parte scura è 1,5 volte quella della parte chiara quindi

$$\frac{\pi R r}{\pi R^2 - \pi R r} = \frac{r}{R - r} = \frac{3}{2} \rightarrow r = \frac{3}{5} R \quad r = \frac{3}{5} 50\ cm = 30\ cm$$

$$\pi R r = 1{,}5\ (\pi R^2 - \pi R r)$$

$$2{,}5 R r = 1{,}5 R^2$$

$$r = \frac{1{,}5}{2{,}5} \quad R = \frac{1{,}5\text{x}0{,}5m}{2{,}5}$$

$r = 0{,}3$ m

Nella figura in rispetto alla consegna della scala 1:10, r deve misurare 3 cm.

Esercizio n. 6 (5 punti) L'inizio della fine

Un numero a sei cifre comincia con la cifra 2.

Se si sposta il 2 alla fine del numero, il numero a sei cifre ottenuto è maggiore di quello iniziale di 461 214.

Si può impostare la sottrazione considerando che ogni cifra deve verificare le condizioni: $a \neq 0$, $0 \leq b, c, d, e \leq 9$

```
 a b c d e 2 -
 2 a b c d e
 -----------
 4 6 1 2 1 4
```

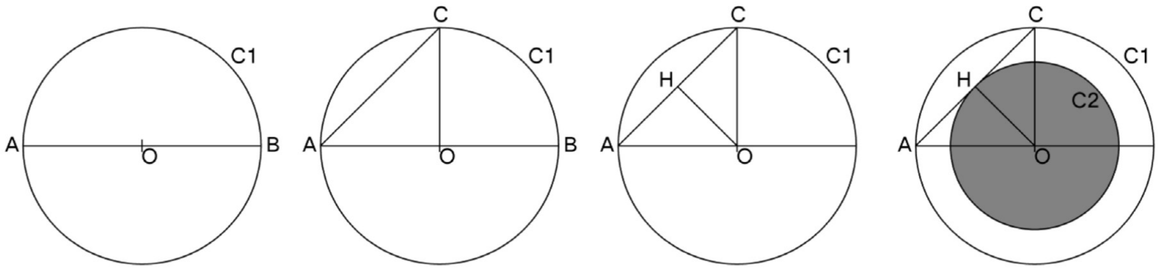
da cui si ricava

	e=8 con riporto di 1
1 + d +1 = 8	d=6 senza riporto
c + 2 = 6	c=4 senza riporto
b + 1 = 4	b=3 senza riporto
a + 6 = 3	a=7 con riporto

Il numero iniziale risulta, pertanto**, 273 468.**

Esercizio n. 7 (7 punti) Bersaglio equidiviso

Un percorso risolutorio possibile è qui rappresentato in tappe successive da sinistra a destra:



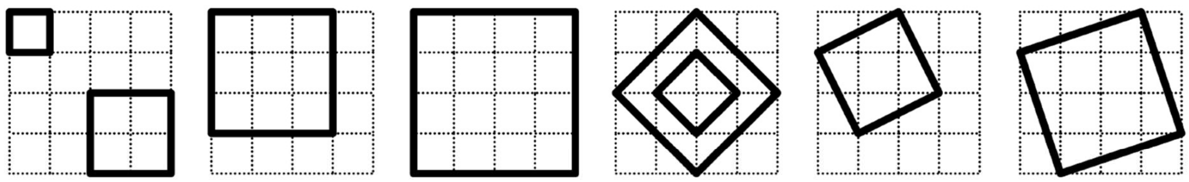
Denominato R il raggio del cerchio C_1, la sua area è pari a πR^2.

HO, raggio di C_2 è il semilato del quadrato inscritto in C_1 essendo il triangolo AOC isoscele con gli angoli acuti di 45°. Si deduce, quindi, che l'area di C_2 (superficie grigia) πHO^2 è pari a $\frac{\pi}{2}R^2$.

Pertanto la corona circolare (parte bianca), essendo la differenza tra C_1 e C_2, è equivalente a C_2: parte bianca e parte grigia sono equivalenti per cui il bersaglio è equidiviso.

Esercizio n. 8 (5 punti) Punti al quadrato

Ecco gli 8 quadrati che si possono tracciare con riportate le misure in u:



$c = 1$ $c = 2$ $c = 3$ $c = 4$ $c = \sqrt{2}$ $c = \sqrt{5}$ $c = \sqrt{10}$

$c = 2\sqrt{2}$

Estensione dell'esercizio

Si può richiedere quanti siano per ogni tipo i quadrati disegnabili.

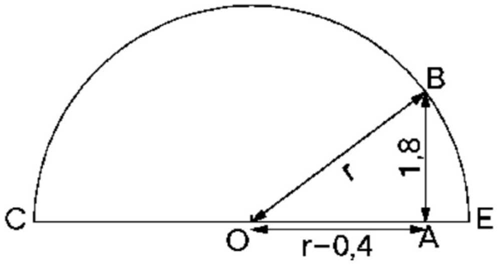
Approfondimento

Il teorema di Georg Alexander Pick (Vienna, 10 agosto 1859 – Theresienstadt, 26 luglio 1942) per determinare l'area dei poligoni reticolari permette di calcolare l'area di ogni quadrato.

Esercizio n. 9 (7 punti) **Le gallerie impossibili**

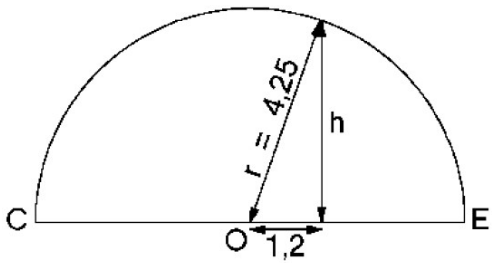
Per il II teorema di Euclide applicato al triangolo CEB

$\overline{AB}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{AE} \rightarrow \overline{CA} = 8{,}10\ m \rightarrow \overline{CE} = 8{,}50\ m$ quindi l'altezza del tunnel è di 4,25 m.

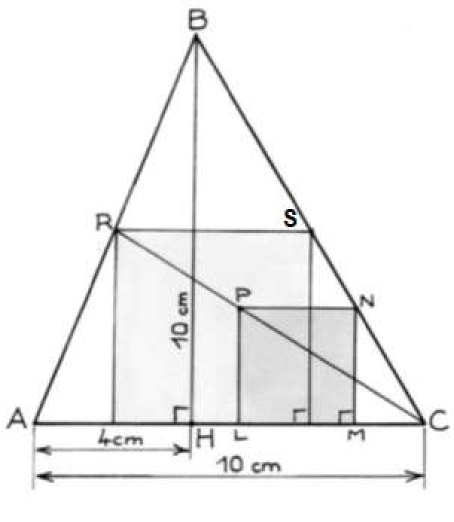


Il camion non può passare; impostando, infatti, un passaggio esattamente al centro della galleria, la larghezza dell'autocarro di 2,40 m richiederebbe una altezza dell'autocarro di 4,08 m contro i 4,10 m effettivi.

$$\sqrt{(4{,}25m)^2 - (1{,}20m)^2} = 4.08\ m < 4{,}10\ m$$



Esercizio n. 10 (10 punti) **Quadrato alla grande**



I triangoli RSB e ACB sono simili.

Posto RS = x si ha

x : 10 = (10 – x) : 10 10x = 10(10 – x)

Risolvendo l’equazione si ottiene x = 5.
Il lato richiesto misura 5 cm.

Approfondimento

Ad esempio: risolvere il problema seguendo percorsi diversi e anche domandarsi perché nella figura è già stato indicata la misura AH = 4 cm.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) Gioco per esperti

Ponendo un sacchetto solo biglie rosse (al più 4) e tutte le rimanenti nell’altro, Giulia ha la certezza di estrarne almeno una rossa. Nell’altro sacchetto si ha una probabilità maggiore di estrarre una biglia rossa quanto più il loro numero è vicino a quello delle biglie blu.

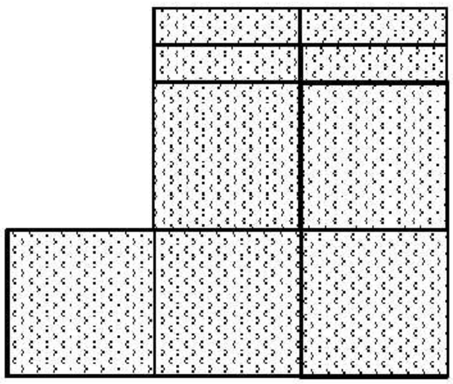
La probabilità maggiore di vincita si ha, pertanto, con una sola biglia rossa in un sacchetto e tutte le rimanenti nell’altro.

Possibile composizione del primo sacchetto (e quindi del secondo) e calcolo delle rispettive probabilità (almeno una biglia rossa deve essere presente nel secondo sacchetto)

B/R nel	1	2	3	4
0	1·4/9	1·3/8	1·2/7	1·1/6
1	1/2·4/8	2/3·3/7	3/4·2/6	4/5·1/5
2	1/3·4/7	2/4·3/6	3/5·2/5	4/6·1/4
3	1/4·4/6	2/5·3/5	3/6·2/4	4/7·1/3
4	1/5·4/5	2/6·3/4	3/7·2/3	4/8·1/2
5	1/6·1	2/7·1	3/8·1	4/9·1

La tabella potrebbe essere costruita considerando la complementarità delle situazioni.

Esercizio n. 12 (7 punti) Carta strappata



Una soluzione possibile è rappresentata a fianco.
I quadrati hanno lato x e i lati dei rettangoli hanno misure u e x
L’area totale è pertanto $5x^2 + 4ux$ e il perimetro $10x + 4u$

Esercizio n. 13 (10 punti) Terne

Se m = 5 e n = 4, a = 25 – 16 cioè a = 9
b = 2mn, cioè b = 40
c = 25 + 16, cioè c = 41

per cui la terna è **9**, **40**, **41**

Se b = 2024 allora scomponendo in fattori b = 2·1012 e, quindi, mn =1012, cioè mn = 2^2·11·23.

Si tenga presente che se a, b e c fossero pari non formerebbero mai una terna primitiva: si possono quindi eliminare i casi relativi.

Si ricava la scrittura di 1012 come prodotto di due fattori di cui uno almeno dispari: 4·253 = 11·92 e, infine, 1012 = 23·44.

Nella tabella seguente si riportano gli elementi delle 4 terne pitagoriche primitive con b =2024:

m	**n**	**a**	**b**	**c**
1012	1	1 024 143	2024	1 024 145
253	4	63 993	2024	64 025
92	11	8 343	2024	8 585
44	23	1 407	2024	2 465

Approfondimento culturale

D’interesse storico è la Tavoletta chiamata Plimpto 322 che è la più famosa delle numerose tavolette numeriche d’argilla babilonesi; fu scoperta circa nel 1800 a.C.

Proviene dall’Iraq e fu scoperta durante degli scavi illegali, poi, riacquistata circa nel 1922 da George Plimpton che la regalò all’Università della Columbia.

Presenta una tavola di numeri cuneiformi di quattro colonne e quindici righe in numerazione sessagesimale, all’epoca utilizzata in Mesopotamia. Permette di risolvere certi problemi geometrici con il ricorso a terne pitagoriche.