

# Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classe prima

Accoglienza 2024 – 2025

Proposta di soluzione

## Esercizio n. 1 (7 punti) Tic Tac

Jean-Noël per prima cosa dovrà far partire l'orologio che c'è nello chalet utilizzando le sue batterie nuove, mettendolo su 0.00.

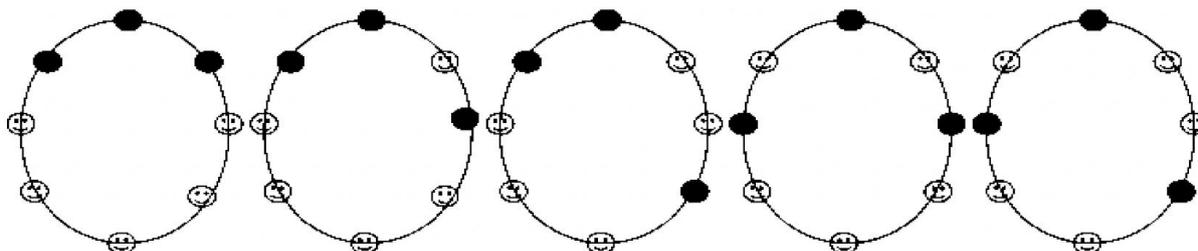
Immediatamente salirà sulla collina, leggerà velocemente l'ora sul campanile, ridiscenderà.

Verificato sull'orologio dello chalet il tempo trascorso, lo dividerà per tre e, infine, lo aggiungerà all'ora letta sul campanile.

E' evidente che ci sono alcuni secondi persi durante le varie operazioni (partenza, lettura dell'ora sul campanile, arrivo, divisione, e, sistemazione delle ore sull'orologio) che si considerano trascurabili.

## Esercizio n.2 (5 punti) Collana

Compresa la soluzione dell'esempio che non è, però, valutata:



## Esercizio n. 3 (10 punti) Punti di vista

Il quesito può essere risolto per tentativi con una tabella del tipo:

Numero quadrati completi	Numero giorni impiegati	Punti ottenuti	Numero giorni "complementari" fino a 28	Numero quadrati incompleti	Punti sottratti	Punti totali
5	5	10	23	Caso impossibile		
6	6	12	22	11	33	-11
7	7	14	21	Caso impossibile		
8	8	16	20	10	30	-14
9	9	18	19	Caso impossibile		
...						
12	12	24	16	8	24	0

La risoluzione del quesito offre lo spunto per ragionare sul rapporto tra due numeri.

In questo caso dalla relazione  $2x = 3y$  (punti ottenuti = punti sottratti) si deduce che il numero dei quadrati completi deve essere divisibile per 3 mentre il numero dei quadrati incompleti deve essere divisibile per 2.

Il quesito può essere risolto per via algebrica impostando un sistema.

Indicando con  $x$  il numero dei quadrati giornalmente completati e con  $y$  quello dei completati in due giorni si ottiene il sistema:

$$x + 2y = 28 \text{ (giorni totali)}$$

$2x - 3y = 0$  (relazione tra i quadrati completi e quelli incompleti).

Risolto il sistema si ottiene il valore  $x = 12$  e  $y = 8$  per un totale di 20 quadrati completati in 28 giorni.

#### Esercizio n. 4 (7 punti) Raccolta di firme

Probabilmente la prima idea del lettore sarà stata quella di calcolare la media aritmetica.

Calcolare la media significa sommare i singoli valori e dividerli per il totale. La media, per sua natura, è un parametro affidabile solo se i numeri su cui viene applicata sono vicini tra loro.

Se si prosegue nell'analisi dei singoli dati della tabella si nota, invece, la presenza di valori anche molto distanti tra loro (es 854 e 91 054).

S'intuisce, quindi, che l'**indice statistico media aritmetica** non è adatto in quanto non rappresentativo.

Più adatto è l'**indice statistico mediana**: valore della variabile quantitativa che, nella distribuzione dei valori osservati/registrati, disposti in ordine crescente, occupa la posizione centrale cosicché il numero delle variabili che hanno valore inferiore alla mediana è uguale al numero di quelle che hanno valore maggiore della mediana.

**Se il numero di dati è dispari la mediana corrisponde al valore centrale, ovvero al valore che occupa la posizione a metà, se il numero di dati è pari, la mediana è stimata utilizzando i due valori che occupano le posizioni calcolandone la media.**

Valle D'Aosta	854
Molise	1245
Basilicata	2987
Trentino	5085
Valle d'Aosta	5226
Abruzzo	7069
Friuli	7454
Calabria	7549
Marche	9883
Liguria	11123
Sardegna	13555
Puglia	20568
Sicilia	21855
Campania	28217
Toscana	31217
Piemonte	38890
Emilia Romagna	44656
Lazio	50031
Lombardia	91050

Mediamente sono stati raccolti 11 123 voti.

L'occasione può essere opportuna per il docente in classe di sviluppare il ragionamento introducendo o riprendendo il concetto di altri **indici di posizione**, quali **la moda** e il **percentile**.

Fin qui l'applicazione statistica correttamente considerata. Naturalmente il cittadino interessato potrebbe avere avuto interessi specifici nella lettura che esulano dal quesito posto.

Si cita solo un caso come esempio. Se il cittadino fosse interessato a una qualche azione di rinforzo di richiamo al voto di concittadini per comprendere dove mirare azioni a livello regionale, questi dati, anche calcolata la mediana, non gli sarebbero sufficienti in quanto avrebbe bisogno di conoscere per ogni regione e/o la regione di suo interesse la

numerosità dei cittadini aventi età per richiedere un referendum: in sintesi, dovrebbe conoscere il valore percentuale dei votanti rapportato agli aventi diritto.

### Approfondimento

L'utilizzo della mediana, come strumento statistico, ha una storia recente, rispetto alla media aritmetica che era conosciuta fin dalle prime civiltà.

Il termine " mediana" fu coniato da Antoine Augustin Cournot (Gray, 28 agosto 1801 – Parigi, 31 marzo 1877), filosofo matematico francese, fondatore dell'Economia matematica; successivamente, il britannico Francis Galton (Sparkbrook, 16 febbraio 1822 – Haslemere, 17 gennaio 1911), esploratore, biologo, che gli statistici ricordano perché fondatore dell'Eugenetica, utilizzò la mediana per i suoi calcoli statistici dato che in molti casi la media aritmetica era troppo laboriosa da calcolare e, alla fine, risultava poco significativa.

Ma la sorpresa fu quando Theodor Fechner (Groß Särchen, 19 aprile 1801 – Lipsia, 18 novembre 1887), psicologo e statistico tedesco, diffuse il suo utilizzo in ambito psicologico, ovvero nell'ambito della psicofisica che introduce misurazioni quantitative nell'ambito della psicologia. Ora la mediana, che con la stessa definizione propone formule differenti a seconda del carattere da studiare (qualitativo ordinabile, quantitativo discreto o per classi di valori) si configura un potente strumento " media lasca robusta" per il controllo dei valori anomali presenti nelle distribuzioni (detti *outliers*).

**Lecture divulgative d'interesse**, disponibili in rete:

<https://www.gravita-zero.it/media-mediana-qual-indicatore-statistico-usare-misurare-la-ricchezza-un-paese/>

<https://www.lucianocarta.it/2023/06/30/media-e-mediana-poche-analogie-ma-molte-differenze/> (utile per il contesto economico finanziario)

<https://sapere.virgilio.it/scuola/medie/matematica-statistica/statistica/media-mediana-moda> (facile come approccio e intuitiva la sequenza di esempi sui voti scolastici)

<https://clariscience.com/blog/medical-writing-e-comunicazione-scientifica/medical-writing/media-moda-e-mediana-le-stime-di-tendenza-centrale> (immediata per l'evidenza della rappresentazione grafica la differenza illustrata tra media e mediana)

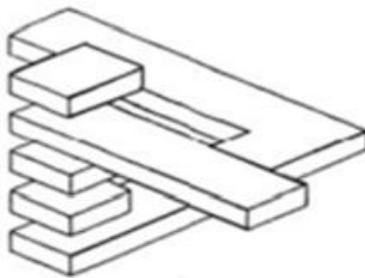
<https://www.webtutordimatematica.it/esercizi-di-statistica/statistica-descrittiva/es-indici-posizione-variabilita>

o **bibliografico "classico"**

B. De Finetti, "Paradossi sulle medie" in Periodico di Matematiche Serie IV, Vol. XLIV, n.2, 1966, pag. 138 - 150

### Esercizio n. 5 (5 punti) Figure impossibili

Una possibile soluzione:



### Approfondimento

**Oscar Reutersvärd** (29 novembre 1915 – 2 febbraio 2002) è stato un artista grafico svedese che nel 1934 ha aperto la strada all'arte dei disegni 3D che inizialmente possono sembrare fattibili, ma non possono essere fisicamente costruiti. A volte viene descritto come "il padre della figura impossibile", anche se ci sono esempi molto più antichi, ad esempio *la Satira sulla falsa prospettiva* di Hogarth.

### Esercizio n. 6 (10 punti) Cinque palline in un'urna

La tabella sottostante ci fornisce tutte le risposte. Si supponga che il numero scritto nella prima colonna sia il primo numero estratto e quello scritto nella seconda colonna da sinistra il secondo numero estratto, si contano 20 possibili numeri, dei quali 8 sono pari e 6 sono primi.

Primo numero estratto	Secondo numero estratto	N	N Pari	N Primo
1	2	12	x	
	3	13		x
	4	14	x	
	5	15		
2	1	21		
	3	23		x
	4	24	x	
	5	25		
3	1	31		x
	2	32	x	
	4	34	x	
	5	35		
4	1	41		x
	2	42	x	
	3	43		x
	5	45		
5	1	51		
	2	52	x	
	3	53		x
	4	54	x	

La probabilità che N sia un numero pari è  $8/20 = 2/5$

La probabilità che N sia un numero dispari è  $1 - 2/5 = 3/5$

La probabilità che N sia un numero primo è  $6/20 = 3/10$ .

Un altro modo di rappresentare i casi è utilizzare la tabella seguente:

5	15	25	35	45	
4	14	24	34		54
3	13	23		43	53
2	12		32	42	52
1		21	31	41	51
	1	2	3	4	5

La tabella conferma che, tra i possibili numeri, quelli pari sono 8, per cui la probabilità che il numero N sia pari è  $8/20 = 2/5$ . Stesso discorso se si scambiano le cifre.

Si capisce facilmente che non possono formarsi numeri di cifre uguali dal momento che la prima pallina estratta non viene rimessa nell'urna. Ecco perché la diagonale principale della tabella è priva di numeri.

#### Approfondimento con estensione

Si potrebbe porre anche la domanda:

Se si scambiano di posto le due cifre di N, qual è la probabilità che il nuovo numero sia ancora un numero pari?

#### Soluzione

Se si scambiano di posto le due cifre di N, non cambia nulla riguardo alla probabilità che il nuovo numero sia ancora pari: è la stessa di prima, cioè  $2/5$ .

### Esercizio n. 7 (7 punti) Formidabile

Il percorso lungo una delle semicirconferenze di raggio unitario misura  $\pi u$ , su quella di raggio doppio  $2\pi u$ , poi  $3\pi u$  fino a  $6\pi u$ .

Qualunque sia il percorso che effettua si verifica che la lunghezza è sempre  $6\pi u$ .

### Esercizio n. 8 (5 punti) Scanalature

Ogni giro completo del nottolino corrisponde a un cambio di scanalatura nella ruota stellata. A ogni giro della motrice la stellata ruota di  $360^\circ/(n \text{ scanalature})$ .

Se la ruota stellata ha sei scanalature, occorrono, quindi, sei giri della ruota motrice e, di conseguenza, del nottolino.

Se la ruota stellata percorre un angolo di  $45^\circ$  a fronte di un giro completo del nottolino, allora da  $360/n = 45$  segue  $n = 360/45$ , cioè il numero delle scanalature è 8.

**Approfondimenti** tratti dalla Enciclopedia italiana - Treccani

“**cricchétto**” s. m. [voce di origine onomatopeica]. – In meccanica, organo di arresto che impedisce la rotazione in un dato senso di una ruota dentata sui denti della quale va a contrastare; è detto anche “*nottolino*”.

Il nottolino fa parte degli arpionismi.

“Gli arpionismi sono meccanismi comprendenti particolari accoppiamenti cinematici, che agiscono generalmente in modo discontinuo o intermittente, e manifestano un comportamento differente a seconda del senso in cui agiscono le forze applicate o in cui si svolgono determinati movimenti. Si tratta di una classe di meccanismi che presenta una notevole varietà di forme e di tipi, cui corrispondono proprietà meccaniche differenti, cosicché numerose sono anche le applicazioni, e varî sono gli scopi ai quali i singoli meccanismi possono essere destinati.

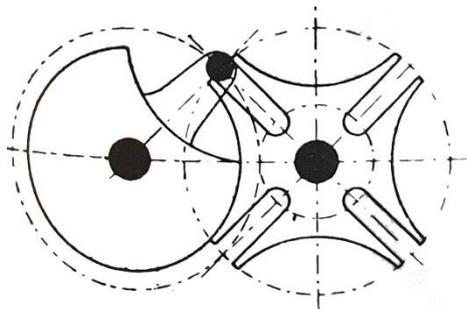
Il più semplice e caratteristico tipo di arpionismo è quello che risulta dall'accoppiamento di una ruota a denti obliqui (denti di sega) con un *arpione* o *nottolino*, sotto l'azione di una molla (o di un peso) che assicura la chiusura di forza della coppia. Se il nottolino è articolato a un punto fisso il sistema costituisce un arresto unilaterale (poiché la ruota risulta libera di ruotare soltanto in un determinato verso e non in senso contrario) e come tale viene impiegato, sotto varie forme, negli apparecchi di sollevamento (organi di ritegno o di sicurezza. Se poi sulla ruota agisce un secondo nottolino, articolato a un membro dotato di moto oscillatorio, la ruota assume un movimento progressivo intermittente, con spostamenti elementari proporzionali all'ampiezza delle oscillazioni (v. Macchine, XXI, p. 742).

Su questo concetto e sull'impiego combinato di altri meccanismi semplici (viti, manovellismi, ecc.) sono basati molti tipi di arpionismi, atti alla trasformazione di moti continui o periodici in movimenti intermittenti (rotatori o traslatori) con rapporto variabile dei rispettivi spostamenti elementari. Ricordiamo, fra le applicazioni, gli organi di comando dei movimenti di alimentazione in molte macchine operatrici, come piallatrici, limatrici, ecc.

Senza alterare la costituzione della catena cinematica, una modificazione nella forma costruttiva di qualche organo può conferire al sistema particolari proprietà. (..omissis)

“Infine è da ricordare una categoria di meccanismi che presenta caratteristiche comuni agli arpionismi propriamente detti e agli ingranaggi (meccanismi che servono alla trasmissione di movimenti da un albero - organo di forma allungata a sezione circolare - a un altro, mediante una coppia di organi dentati, per lo più ruote. L'applicazione più comune mira ad aumentare il momento torcente a discapito della velocità angolare o viceversa, come nel cambio di velocità delle automobili.

Si tratta dei *rotismi ad azione intermittente*, o arpionismi a *nottolino rotante*, i quali trasformano direttamente un moto rotatorio continuo in un moto rotatorio intermittente. Il tipo più caratteristico di tali meccanismi è il rotismo a *croce di Malta*



(v. Arpionismo, APPENDICE I, 1938”).

### Esercizio n. 9 (10 punti) Miliardario?

È sufficiente calcolare  $100 : 0,0000166$  per ottenere 6 000 000 (considerando l'ordine di grandezza e la prima cifra significativa di 6 024 096,38) come numero dei biglietti "cercato" che, però, come tutti i ragionamenti probabilistici, non dà certezza.

La risposta è, pertanto, positiva perché  $15,3 \text{ cm} \times 6\,000\,000 = 918 \text{ km} > 850 \text{ km}$ .

Soluzione altrettanto valida il calcolo dei biglietti necessari per coprire 850 km (5 555 556) e poi il confronto con i biglietti "acquistabili".

### Approfondimento

Quesiti che abbiano come oggetto giochi basati su azzardo/scommesse richiedono un contesto di premessa sul significato di gioco equo: il gioco è equo se le somme puntate dai due giocatori sono direttamente proporzionali alle rispettive probabilità di vincita.

Ciò è fondamentale per una educazione etica e civica.

Diversi progetti sono stati attuati in tal senso:



Il Progetto di ricerca "Bet On Math" (Scommetti sulla matematica – vedasi <http://betonmath.polimi.it>) è un Progetto di Matematica Civile, nato "dall'osservazione della forte espansione del gioco d'azzardo in Italia e dalla constatazione che questo fenomeno ha radici nella preoccupante diffusione di un forte analfabetismo matematico....grazie ad una opportunità concreta: il 5xmille Polisocial Award promosso dal Politecnico di Milano attraverso il programma Polisocial e con il supporto della Fondazione Politecnico di Milano." (2016)

Altro progetto educativo matematico è

<https://fateilnostrogioco.it/>



*"Fate il Nostro Gioco™ nasce da un obiettivo e da una precisa convinzione. L'obiettivo è quello di svelare le regole, i piccoli segreti e le grandi verità che stanno dietro all'immenso fenomeno del gioco d'azzardo in Italia. La convinzione è che il modo migliore per farlo sia usare la matematica e la psicologia come una specie di antidoto logico, per creare consapevolezza intorno al gioco e svelare i suoi lati nascosti.*

*Fate il Nostro Gioco™ si fonda su un ampio studio della matematica e della psicologia del gioco d'azzardo, completamente originale, ideato da Taxi1729, una società di divulgazione scientifica torinese. Il progetto nasce nel 2009 grazie a una mostra dedicata alla matematica del gioco d'azzardo, e da allora si è sviluppato trasformandosi in molte diverse esperienze: una conferenza, un laboratorio, una mostra, un format tv, un corso di formazione per insegnanti e operatori sanitari e, dal 10 marzo 2016 anche un libro."*

Questo progetto è stato oggetto di presentazione a Monza durante la supergara del 2018 centrata proprio sulla Speranza matematica e l'illusione del vincere: <https://www.matematicasenzafrontiere.it/msf/la-giornata-della-premiazione-2018/>.

Il laboratorio **IL GIOCO E IL CASO**, promosso dal Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli studi Bicocca di Milano, con il coordinamento della prof. Gabriella Kuhn, ha riscosso un grande interesse: soprattutto durante il periodo pandemico in quanto è stato possibile svolgere tutta l'attività on-line: "Il Progetto è rivolto a studenti, studentesse e insegnanti delle classi terze e quarte superiori in quanto necessita del calcolo combinatorio. Un obiettivo è fornire un approccio scientifico a un problema che di solito, almeno nella fantasia collettiva, è considerato monopolio della "fortuna.

*Riteniamo che il gioco d'azzardo sia un ottimo esempio di situazione in cui è possibile partire dalla pratica e dall'esperienza per arrivare ad una sintesi dei risultati e quindi, come fase successiva, ad una modellizzazione matematica e, in definitiva, ad un approccio scientifico al problema.*

*Il laboratorio si articola in varie fasi: sono previste sia lezioni teoriche sia la sperimentazione di alcuni giochi d'azzardo sia simulazioni al computer per un totale di 22 ore circa."*

### Esercizio n. 10 (7 punti) Un anno al quadrato

a. La prima richiesta prevede, appunto l'esplicitazione di due esempi, come, considerando 35 e 75,  
 $3 \times 4 = 12 \rightarrow 1225 = 35^2$ ,  $7 \times 8 = 56 \rightarrow 5625 = 75^2$

b. La risposta alla seconda domanda è, invece, che non sono sufficienti due esempi per affermare la veridicità della congettura di Aldo. Si sarebbe dovuto verificare la procedura applicandola a tutti i numeri interi formati da due cifre di cui l'ultima 5, cioè, anche a 15, 25, 55, 65, 85 e 95.

Pertanto neanche gli studenti possono dichiararsi convinti.

## **Approfondimento**

L'occasione della correzione in classe della soluzione offre l'opportunità al docente d'intervenire con una strategia multipla in base alle necessità degli studenti: per tutti recuperare la competenza di base di effettuare la verifica di una congettura riflettendo che la verifica non significa dimostrazione perché questa richiede generalizzazione.

In fase di confronto ciò potrebbe essere risposta stimolata nel gruppo e, quindi, estensione con compiti diversificati di rinforzo, consolidamento della competenza suddetta in altri contesti problematici.

Mentre, a livello di potenziamento, ad alcuni studenti si potrebbe richiedere di dimostrare se la regola esposta da Aldo valga per calcolare il quadrato di qualsiasi numero (numero qualunque di un numero di cifre qualsiasi) che termini per 5, iniziando ponendogli come stimolo la costruzione, applicando la procedura, del quadrato di 135, poi di 10 365 ..

Limitatamente alle 2 cifre (o a un numero in cui si fissi il numero di cifre che lo compongono) è possibile, anche se potrebbe richiedere tempi lunghi analizzare tutte le situazioni, ma l'estensione ad un numero di cifre qualsiasi necessita di una dimostrazione generale:

“Considerato un qualsiasi numero che finisca con 5, sia  $n$  il numero che sta a sinistra del 5, si può scrivere:

$$(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$$

da cui si deduce che la regola esposta da Aldo vale per calcolare il quadrato di tutti i numeri che terminano per 5.”