Mathématiques Sans Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 28 febbraio 2024

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) 

Denominato x il numero di pasti di cui Jacquot è soddisfatto del servizio e 14 –x il numero di pasti di cui non è soddisfatto, si può scrivere la seguente relazione

$3x - 4(14-x) = 0$ da cui si deduce $x = 8$ per cui si afferma che Jean è stato soddisfatto **8 volte**.

Esercizio n. 2 (5 punti) **L'età dell'insegnante di matematica**

Detta x l'età del docente, è possibile impostare un'equazione:

$2024 – (1900 + x) = x$

da cui si ricava che $x = 62$

per cui si deduce che il docente ha nel 2024 **62 anni**.

La stessa condizione si potrebbe verificare per il nipotino ammesso che abbia un'età maggiore di 10 anni;
Infatti da $2024 – (2000 + x) = x$ si ricava $x = 12$, cioè che l'età del nipotino risulterebbe di **12 anni**.

Sono possibili anche soluzioni senza ricorrere all'uso di equazioni: osservando che il docente deve essere nato tra il 1900 e il 2000, si calcola l'intervallo di anni 2024 – 1900 = 124; l'unica possibilità affinché l'età del docente sia uguale al suo anno di nascita si ottiene dividendo tale intervallo per 2, da cui l'età del docente è 124 : 2 = 62.

Similmente per il nipotino si calcola 2024 – 2000 = 24, da cui la sua età è 24 : 2 = 12.

Approfondimento

Si ricorre alla scrittura polinomiale e, denominate x la cifra delle decine e y quella delle unità, si ha:

$2000 + 20 + 4 – (1000 + 900 + 10x + y) = 10x + y$

da cui si ricava che $62 = 10x + y$

per cui si deduce che il docente ha nel 2024 **62 anni**.

La stessa condizione si potrebbe verificare per il nipotino ammesso che abbia un'età maggiore di 10 anni;
Infatti da $2000 + 20 + 4 – (2000 + 10x + y) = 10x + y$ si ricava $12 = 10x + y$, cioè che l'età del nipotino risulterebbe di **12 anni**.

Esercizio n. 3 (7 punti) **111**

Altri due numeri che rispondono alle condizioni poste sono 11988 e 22977.

11988 **:** 111 = 108 22977 **:** 111 = 207

In entrambe le divisioni si nota che la prima cifra del quoziente è la prima del dividendo, la seconda è 0 e la terza è l'ultima del dividendo.

Si può, quindi, ipotizzare la seguente congettura:

Il risultato della divisione tra un numero della forma xx(x+y)yy per 111 è un numero del tipo x0y, con x e y numeri interi la cui somma è minore di 10.

Per dimostrare la proprietà si può procedere nel modo seguente:

in forma polinomiale $xx\left(x+y\right)yy = x\cdot 10^4 + x\cdot 10^3 + \left(x+y\right)\cdot 10^2 + y\cdot 10^1 + y$

$$x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + y = \left(10^2 + 10 + 1\right) \cdot \left(x \cdot 10^2 + y\right)$$

$$xx\left(x+y\right)yy = \left(10^2 + 10 + 1\right) \cdot \left(x \cdot 10^2 + y\right)$$

$$111 = 10^2 + 10 + 1$$

Il numero $xx\left(x+y\right)yy$ può essere scritto come prodotto di due fattori di cui uno è 111

$$\left(10^2 + 10 + 1\right) \cdot \left(x \cdot 10^2 + y\right) : \left(10^2 + 10 + 1\right) = x \cdot 10^2 + y$$

$$xx\left(x+y\right)yy : 111 = x0y.$$

Esercizio n. 4 (5 punti) **Percorsi**

In sintesi

2024 x 3 : 23 x 17 x 27 : 11 x 5 x 2 : 8 : 17 x 5 : 2 = 2025

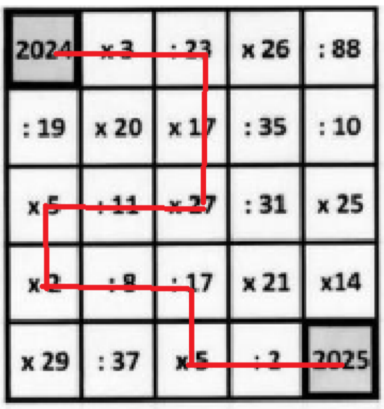
E' difficile immaginare che l'esercizio sia risolto per tentativi che sarebbero lunghi.

Più razionale sarebbe procedere per esclusioni, ad esempio, considerando: i numeri $2024=2^3$ x 11 x 23 e $2025=3^4$ x 5^2 sono primi tra loro; per passare, quindi, da uno al l'altro solo con moltiplicazioni e divisioni è necessario dividere per tutti i fattori del primo e moltiplicare per tutti i fattori del secondo. Se si moltiplica per uno o più degli altri numeri in tabella si deve poi potere dividere per il loro prodotto (in uno o più passaggi).

Si può, quindi, iniziare cancellando dalla tabella i numeri che non presentano tale caratteristica:

2024	x3	:23	x26	:88
:19	x20	x17	:35	:10
x5	:11	x27	:31	x25
x2	:8	:17	x21	x14
x29	:37	x5	:2	2025

2024	x3	:23	x26	:88
:19	x20	x17	:35	:10
x5	:11	x27	:31	x25
x2	:8	:17	x21	x14
x29	:37	x5	:2	2025



2024	x 3	: 23	x 26	: 88
: 19	x 20	x 17	: 35	: 10
x 5	: 11	x 27	: 31	x 25
x 2	: 8	: 17	x 21	x14
x 29	: 37	x 5	: 2	2025

Esercizio n. 5 (7 punti) **Pacchi in linea**

Si considerino i pacchi dal n°1 al n°6 di masse rispettive **a**, **b,** **c**, **d**, **e**, **f**.

Poiché la massa totale di ogni terna è di 8 kg si ricavano le relazioni:

a + b + c = b + c + d
b + c + d = c + d + e

c + d + e = d + e + f
da cui **a = d**, proseguendo il ragionamento **b = e   c = f**.

Ripetendo il ragionamento è possibile concludere che due terne consecutive qualsiasi saranno sempre formate da colli di massa **a**, **b**, **c**. Ci saranno quindi 13 terne consecutive **a**, **b**, **c** e il 40-esimo collo avrà massa **a**. In particolare:

Numero collo	19	20	21
massa	a	b	c

Il collo n°20 e il collo n°21 hanno la stessa massa quindi b=c e quindi si hanno solo tre possibilità: **b** = 1 kg e **a** = 6 kg, **b** = 2 kg e **a** = 4 kg oppure **b** = 3 kg e **a** = 2 kg

Essendo la massa totale 106 kg, l'unica possibilità è **a** = 2 kg e **b** = 3 kg quindi i colli richiesti hanno massa 3 kg ciascuno.

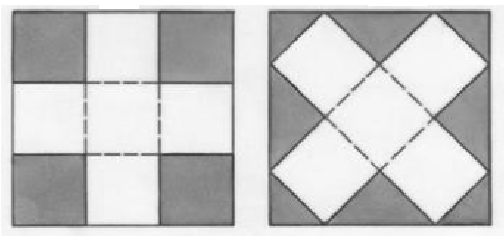
Esercizio n. 6   (5 punti)   Attenti agli scarti!

Detto l il lato del foglio quadrato, lo spigolo della prima scatola risulta $\frac{l}{3}$ mentre quello della seconda $\frac{l}{4}\sqrt{2}$ che corrisponde a una scatola più grande. Per differenza di superfici il modello B produce il minor scarto di cartone.

Infatti:

$l^2 - \frac{5}{9}l^2 = \frac{4}{9}l^2$ scarto modello A $l^2 - \frac{5}{8}l^2 = \frac{3}{8}l^2$ scarto modello B $\frac{3}{8}l^2 < \frac{4}{9}l^2$

A   B



Approfondimento

Più aumenta lo scarto minore è il volume della scatola: questa considerazione può portare a considerazioni di minimo/massimo, di percentuali ecc.

Esercizio n. 7   (7 punti)   Comporre un fiore

Il fiore è composto da quattro petali uguali; ciascuno è il doppio di un segmento circolare di un cerchio di raggio

$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

distante dal centro

$\frac{a}{2}$

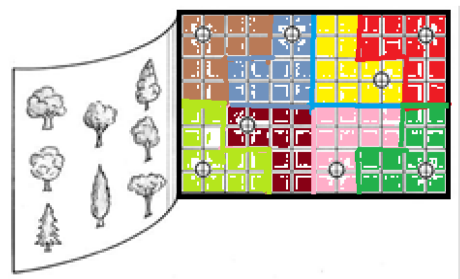
di area

$A = \frac{1}{4}\pi\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\frac{a}{2}$

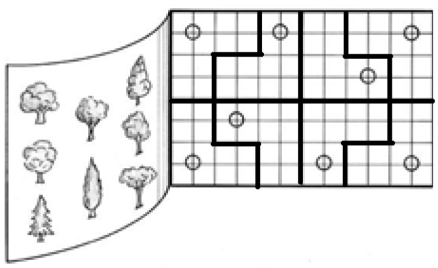
La misura dell'area della superficie complessiva è, pertanto, 8A, cioè **a^2 (π -2)**.

Esercizio n. 8   (5 punti)   Suddivisione alberata

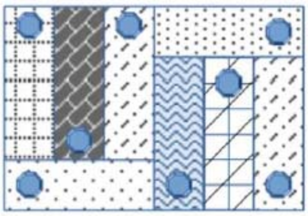
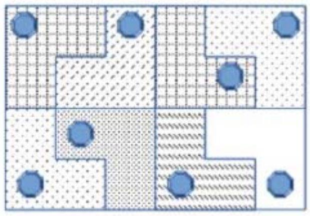
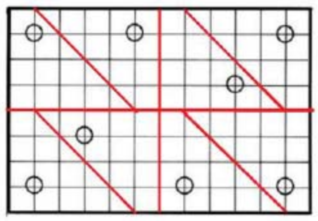
Possibili soluzioni:



o, in bianco e nero



e, anche,

Si evidenzia che sono accettabili soluzioni con parti di forma uguale a parte traslazione o rotazione (trasformazioni nel piano), ma non ribaltamento essendo una trasformazione nello spazio.

Esercizio n. 9 (7 punti) **Algoritmo**

Per ottenere risultato dispari il numero di partenza deve avere tutte e tre le cifre dispari.

Premesso che il numero non deve contenere zero, non deve contenere una cifra pari, si considerano solo i numeri tra 100 e 299 composti unicamente da cifre dispari, quindi si escludono tutti i numeri dal 200 al 299, estremi compresi anche, dalla prova numeri con cifre che risultano permutate rispetto a quelle prese in considerazione.

Primo elenco (solo n dispari)	**Secondo elenco dopo prima eliminazione dei numeri con cifre permutate**	**Terzo elenco seguendo le due tappe successive**	**Risultato**
111, 113, 115, 117, 119	111, 113, 115, 117, 119	111, 113, 115, 117, 119	1, 3, 5, 7, 9
131, 133, 135, 137, 139	133, 135, 137, 139	133, 135	5, 9
151, 153, 155, 157, 159	155, 157,159	157	5
171, 173, 175, 177, 179	177, 179		
191, 193, 195, 197, 199	199		

Pertanto i numeri tra 100 e 299 che danno risultato dispari, applicando l'algoritmo indicato, sono:

111,

113, 131,

115, 151,

117, 171,

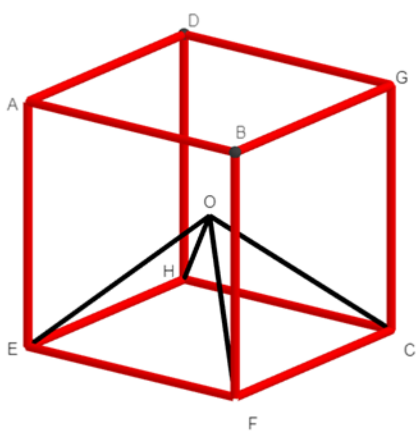
119, 191,

133,

135, 153,

157, 175.

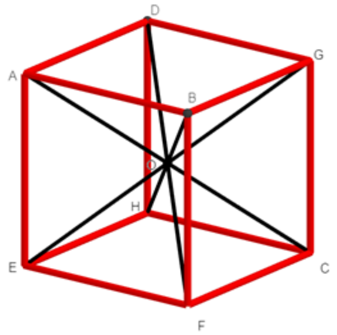
Esercizio n. 10 (10 punti) **Tagliare il cubo**



Il solido ottenuto è una piramide a base quadrata e di altezza pari alla metà dello spigolo di base.
Detto V il volume del cubo il volume di questa piramide è quindi

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{V}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{V}}{2} = \frac{V}{6}$$

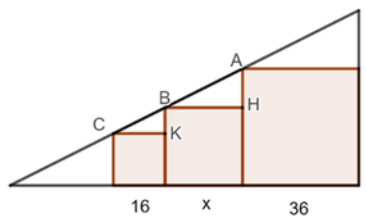
Data la simmetria centrale del cubo si possono ottenere 6 piramidi di questo tipo, tutte con vertice in O e base una faccia del cubo.



Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **Un triangolo e tre quadrati**

Si denominano per semplificazione con A, B e C i vertici dei quadrati coincidenti con tre punti del profilo della piattaforma



Poiché i triangoli BCK e ABH sono simili $x\,(x - 16) = 16\,(36 - x)$

$x = 24$ cm

Esercizio n. 12 (7 punti) **Esercizio in bianco e nero**

	Numerazione gettoni									
Passaggio divisione per	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
3	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●
4	○	●	●	○	○	○	○	○	●	●
5	○	●	●	○	●	○	○	○	●	○
6	○	●	●	○	●	●	○	○	●	○
7	○	●	●	○	●	●	●	○	●	○
8	○	●	●	○	●	●	●	●	●	○
9	○	●	●	○	●	●	●	●	○	○
10	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●

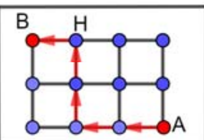
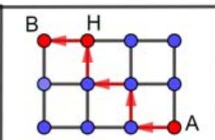
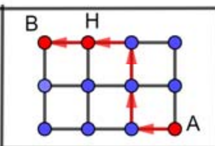
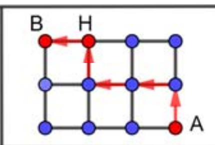
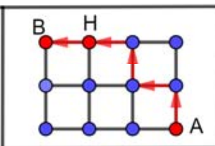
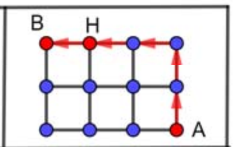
Dopo 10 manipolazioni restano bianchi i gettoni 1, 4 e 9, cioè i quadrati delle potenze di 1, 2 e 3.
Si prosegue rispetto alla richiesta di 100 gettoni e dopo un certo numero di manipolazioni aumentando man mano i gettoni si possono effettuare le seguenti osservazioni:

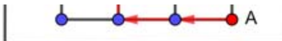
- ✓ risulta bianco il gettone che ha subito un numero di ribaltamenti dispari e nero quello che ha subito un numero di ribaltamenti pari;
- ✓ generalizzando risultano bianchi solo i gettoni che hanno segnati un numero dispari di divisori;
- ✓ gli unici numeri che hanno un numero dispari di divisori sono i quadrati perfetti;

- ✓ alla fine delle 100 manipolazioni rimangono bianchi i gettoni numerati con 1, 4, 9,16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Approfondimento

1) Si considerino per ora solo le potenze di 2, cioè 2^k: se k è dispari, ci sono un numero pari di divisori; se k è pari ci sono un numero dispari di divisori.
Si osserva che 2^k , con k pari, è un quadrato perfetto con un numero dispari di divisori.
2) Si considerino un numero dispari che non sia un quadrato perfetto. Esso ammette un numero pari di divisori, che a coppie costituiscono il divisore e il quoziente nella divisione. (Questi divisori sono ovviamente tutti dispari).
Ad esempio 15 ammette 1,15,3,5; 23 è primo e ammette 1,23; 85 ammette 1,85, 5, 17.
3) Si considerino un numero dispari che sia un quadrato perfetto. Esso ha una radice dispari.
Le combinazioni dei fattori primi nella scomposizione portano ad un numero pari di divisori.
Ad esempio 3^2 ammette 1,3,9; 9^2 ammette 1,81,3,27,9; $15^2 = 3^2 \times 5^2$ ammette i divisori di 3^2 e di 5^2, cioè ammette 1,3,5,9,5,25,45,75,225.
Si osserva che un numero quadrato perfetto dispari ha un numero dispari di divisori.
4) Si considerino un quadrato perfetto pari che non sia una potenza di 2. Esso è del tipo 2^k * (numero dispari)^{pari}, con k pari.
2^k ammette un numero dispari di divisori, incluso 1.
(numero dispari)^{pari} ammette un numero dispari di divisori, incluso 1.
Se si contano i divisori distinti, sono in numero dispari.
Si osserva che un quadrato perfetto pari ammette un numero dispari di divisori.

Percorsi						
Probabilità	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$

				
Probabilità	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$

Esercizio n. 13 (10 punti) Attenti al lupo!

La probabilità che Cappuccetto Rosso passi per il punto L e si faccia così divorare dal lupo è

1/8 +1/16 + 1/16 + 1/16 = 5/16, cioè del 31,25%.

Il lupo ha la maggiore probabilità di incrociare Cappuccetto Rosso nel punto H poiché L e H sono i punti con massima probabilità (uno dei due deve essere presente in tutti i percorsi che portano a casa della nonna) e p(H)>p(L);

P = 1/16 +1/16 + 1/8 + 1/4 +1/16 + 1/8 P = 11/16, cioè del 68,75%, infatti