Matematica Senza Frontiere

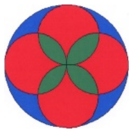
Ufficio Scolastico per la Lombardia

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione on line 7 marzo 2023

BILANCIO PEDAGOGICO

Esercizio n. 1 (7 punti) **Decorazione di una vetrata**
Soluzione da redigere in francese o in inglese o in tedesco o in spagnolo con un minimo di 30 parole.



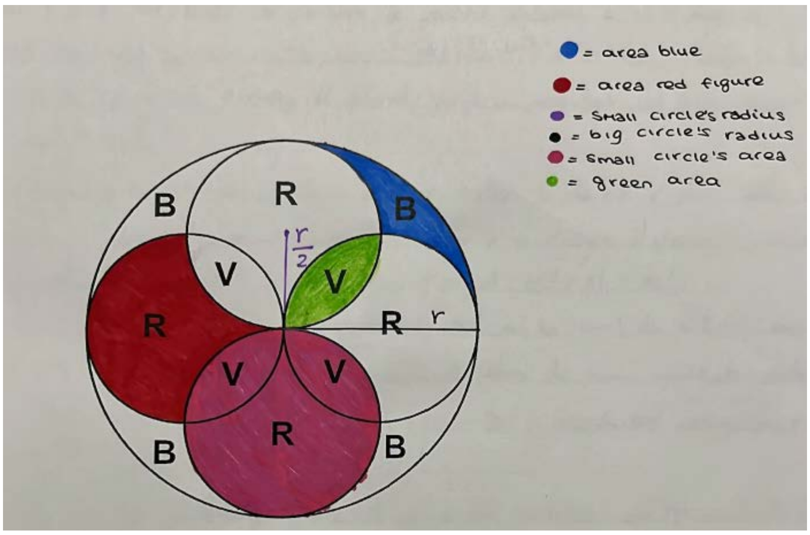
Il quesito con evidente riferimento a situazione reale, di tipo logico percettivo, ha tuttavia evidenziato, con gli esiti, la generalizzata fragilità nell' osservazione della figura, con conseguente ragionamento sulle variabili in gioco.

La percentuale di risposte nulle (non date o con punteggio nullo) nella complessità delle scuole, infatti, è circa il 68% nelle classi seconde e il 49% nelle classi terze ; anche nei licei scientifici la percentuale delle risposte errate e non date raggiunge il 53%. Dall'analisi degli elaborati in sè è risultata alta la frequenza dei casi in cui gli studenti hanno introdotto dati di supporto inutili dimostrando la non attenzione a cogliere la relazione tra le parti evidenziando, anche, l'abitudine al ricorso, meramente applicativo, del calcolo.
Addirittura nelle risposte ai questionari un numero significativo di studenti ha esplicitato, come elemento di difficoltà, l'assenza della misura del raggio.

Nelle risposte al questionario le classi seconde lo hanno indicato come il quesito più interessante (14%), riconoscendone come motivazione la sfida intellettuale indotta (65%); aspetto, quello della sfida riconosciutagli come valenza anche dal 73% delle terze. Relativamente alle classi seconde il 37 % dei docenti hanno rilevato per gli studenti difficoltà rispetto alle competenze di studio padroneggiate.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

disegno di pregio



Risoluzione compresa, ma scritta con poca cura e attenzione ai formalismi

Hp $A_{4V} = 400 cm^2$

Th A_{4B}

Svolgimento

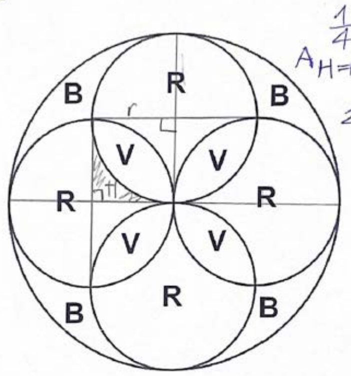
$r :=$ raggio di circonferenza R

$\frac{1}{4}R = \frac{r^2\pi}{4}$

$A_H = r^2 - \frac{r^2\pi}{4}$

$2A_H = 2r^2 - \frac{r^2\pi}{2}$

$r^2 - 2r^2 - \frac{r^2\pi}{2} = V = 100 cm^2$



$\cancel{3r^2\pi + 400 = 4B}$

A circ. grande $= 4r^2\pi$ con $r =$ raggio circ piccola

A circ piccola $= r^2\pi$ con $B =$ area di una parte BLU

A cir grande $= 4\cancel{r^2}\pi = 4B + \cancel{4(r^2\pi)} + 400 cm^2$

$4B = 400 cm^2$

punteggio 7

The figure is formed by circles of 2 dimensions: a large circle of radius R and 4 congruent small circles of radius $\frac{R}{2}$, as seen in the figure.

Calculating the values of the areas will result respectively

$\boxed{\pi R^2}$ for the big circle

$\boxed{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}}$ for the small circles

One small circle is equal to one quarter of the area of the great one.
We can consider a quarter as the small circle (made of 2V areas and 1R area)
or as a circle slice (made of $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R + 1V + 1B$ areas).

With a simple equation we can solve the problem:

$$2V + R = 2 \cdot \frac{1}{2}R + V + B$$

$$2V + \cancel{R} = \cancel{R} + V + B$$

$$2V = V + B$$

$$\boxed{V = B}$$

In the figure we have 4V areas and by calculating 400 cm² : 4 we can find the 1V area, and so the B area:

$$400 : 4 = 100 \rightarrow \boxed{B = 100}$$

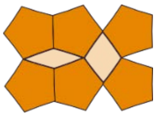
In the figure we have 4 B areas, so $4 \cdot 100 = \boxed{400 cm^2}$ (total of B)

Esercizio n. 2 (5 punti) **La crisi cambia le abitudini di spesa?**

L'esercizio di evidente riferimento a situazione reale, è stato ben compreso dagli studenti, ottenendo mediamente più dell'80% di risposte corrette con almeno il 60% in tutti gli indirizzi di studi.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

Esercizio n. 3 (7 punti) **Pavimentazione**



Il quesito raggiunge mediamente il 70 % di risposte corrette, ma i dati di dettaglio evidenziano una differenza sui tipi di scuola. I licei non scientifici e gli istituti professionali evidenziano, infatti, risposte errate o non date per il 90%. Purtroppo molti elaborati presentano figure disordinate, non curate che hanno indotto errori plurimi di calcolo.; cosìccome la disattenzione di non utilizzare le figure allegate denominando, a volte, anche in modo casuale, angoli uguali con lettere diverse.

Punteggio, invece, medio positivo per il liceo scientifico: 8,1 e massimo valore percentuale di risposte col massimo punteggio.

Sia le classi seconde (37%) sia le terze (33%) hanno giudicato piacevole la risoluzione operativa non citando particolari difficoltà a riguardo in palese contraddizione con i risultati. Parrebbe che non si siano proprio accorti degli errori commessi.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

Esercizio n. 4 (5 punti) **Cene in compagnia**

Quesito basato sull'applicazione del concetto di multiplo e di minimo comune multiplo.
Tutte le tipologie di scuola superano il 75% di risposte corrette anche nelle classi seconde.

Tutto ciò malgrado le classi, complessivamente, abbiano dichiarato nei questionari nel 35% delle risposte di avere incontrato difficoltà nella risoluzione per conoscenze non ancora studiate.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

Esercizio n. 5 (7 punti) **Una circonferenza su una scacchiera**

(Adattato da Martin Gardner – "Enigmi e giochi matematici")

Il quesito è di natura specificatamente geometrica e si basa sull'osservazione della simmetria della circonferenza e sulla applicazione del teorema di Pitagora.
Numerose sono le risposte errate o non fornite. Diversa è la lettura per tipologia scolastica: si evidenzia una migliore performance da parte dei licei scientifici, con un punteggio medio positivo superiore al 50% sia nelle classi seconde sia nelle terze; negli istituti tecnici tecnologici raggiungono risultati migliori le classi seconde; gli altri istituti evidenziano notevoli difficoltà in entrambe le classi.

I docenti ne hanno riconosciuta la valenza diagnostica perché l'esercizio, attraverso l'analisi del processo mentale seguito dagli studenti e degli eventuali errori commessi, consente al docente sia di rimodulare la propria strategia didattica per alcuni interventi specifici sia di proporre agli studenti attività di approfondimento

.

Ambiti d'intervento didattico per recuperare conoscenze e competenze si sono evidenziate a livello della distinzione fra numero decimale finito e numero irrazionale, come a livello della comprensione che con un righello non si otterrà mai una lunghezza espressa da un numero irrazionale. Soprattutto la significatività del quesito si sottolinea per la possibilità che offre per far comprendere agli studenti che si possono fare più congetture di fronte ad un problema, ma queste congetture vanno sottoposte a verifica, contrariamente alle evidenze presenti in molti elaborati.

Esercizio n. 6 (5 punti) **Gli orecchini variegati**

Il quesito riguarda una situazione di incertezza in un contesto reale e richiede l'applicazione della probabilità condizionata.
L'esercizio avrebbe potuto essere risolto mediante schemi o richiamando principi, teoremi e conseguenti procedure di calcolo.

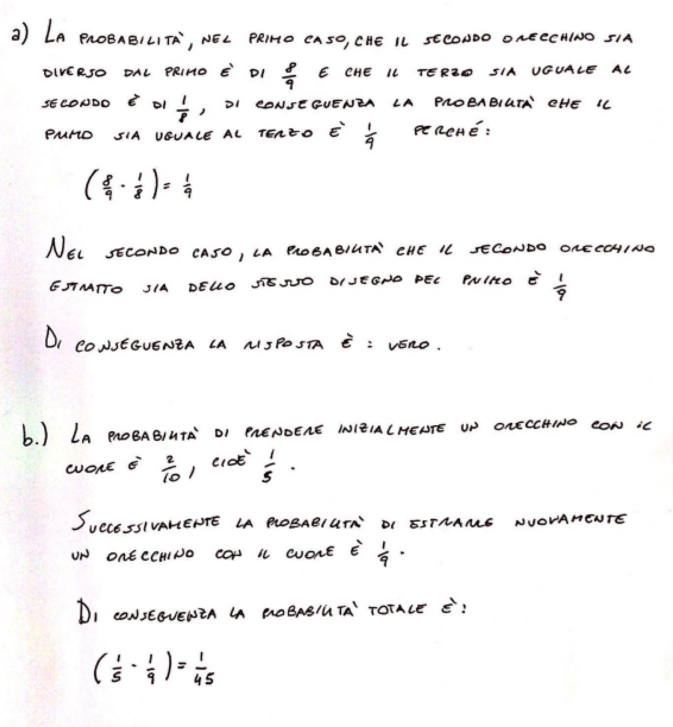
I punteggi rilevati evidenziano decise difficoltà nei vari tipi di scuola, con punteggi nulli che raggiungono complessivamente il 72% nelle classi seconde degli Altri licei e quasi il 40% nel liceo scientifico dove, sempre complessivamente, i massimi raggiungono circa il 12%.

Gli errori rilevati nella correzione possono essere riferiti a una errata interpretazione del testo, a un approccio totalmente astratto alla teoria delle probabilità con errori di applicazione di formule e teoremi e, anche, a una analisi superficiale della situazione problematica con conseguente incomprensione della dipendenza fra eventi.

In sintesi, gli esiti di soluzione di questo quesito hanno evidenziato carenza di formazione a livello di biennio superiore in ambito di decodifica di un testo che descrive una situazione d'incertezze.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

punteggio 5



a) LA PROBABILITÀ, NEL PRIMO CASO, CHE IL SECONDO ORECCHINO SIA DIVERSO DAL PRIMO È DI $\frac{8}{9}$ E CHE IL TERZO SIA UGUALE AL SECONDO È DI $\frac{1}{8}$, DI CONSEGUENZA LA PROBABILITÀ CHE IL PRIMO SIA UGUALE AL TERZO È $\frac{1}{9}$ PERCHÉ:

$$\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{9}$$

NEL SECONDO CASO, LA PROBABILITÀ CHE IL SECONDO ORECCHINO ESTRATTO SIA DELLO STESSO DISEGNO DEL PRIMO È $\frac{1}{9}$

DI CONSEGUENZA LA RISPOSTA È: VERO.

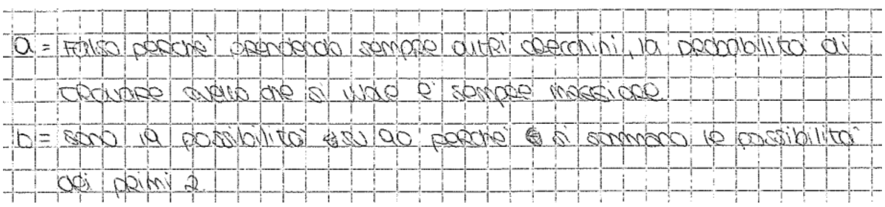
b.) LA PROBABILITÀ DI PRENDERE INIZIALMENTE UN ORECCHINO CON IL CUORE È $\frac{2}{10}$, CIOÈ $\frac{1}{5}$.

SUCCESSIVAMENTE LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE NUOVAMENTE UN ORECCHINO CON IL CUORE È $\frac{1}{9}$.

DI CONSEGUENZA LA PROBABILITÀ TOTALE È:

$$\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{45}$$

punteggio 0



a = Falso perché prendendo sempre altri orecchini, la probabilità di trovare quello che si vuole è sempre maggiore.

b = sono la possibilità su 90 perché si sommano le possibilità dei primi 2.

Esercizio n. 7 (7 punti) **A precious equation**

Il quesito che propone riflessioni in contesto finanziario coinvolge scelte condizionate, basate sulla analisi dell'incremento di valore nel tempo e sulla interpretazione di grafici lineari con particolare attenzione al coefficiente angolare.

Il punteggio medio generale è stato superiore al 67%.

Considerato che il 18% non ha risposto e che l'11% ha conseguito punteggio nullo se ne deduce che quasi un terzo dei partecipanti ha trovato difficoltà nell'affrontare il quesito.

Le criticità hanno riguardato principalmente il calcolo della media aritmetica e la lettura del grafico di una funzione lineare che prevedeva l'attribuzione del corretto significato al valore del coefficiente angolare.

Solo l'1% ha conseguito il punteggio massimo; con valori medi di punteggio leggermente migliori nelle classi di triennio di tutte le scuole.

Gli errori più frequenti riscontrati hanno riguardato l'impostazione e il calcolo nella proporzione, l'arrotondamento con decimali, la mancanza di formalizzazione e l'indicazione delle percentuali.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

punteggio 7

1) Per capire se Marco riuscirà a vendere o meno, dobbiamo calcolare il rialzo della quotazione, dividendo il valore dell'ultimo giorno per quello del primo, moltiplicare il risultato per cento e infine sottrarre cento dal valore ottenuto. Essendo che il valore del rialzo della quotazione è minore del 3%, Marco non vende.

$$\left(\frac{56,217}{54,623}\cdot 100\right) - 100\% \approx 2,92\%$$

2) Per capire se Luigi riuscirà ad acquistare, calcoliamo la media aritmetica del prezzo dell'oro per oncia ed essendo il risultato inferiore a 1700 € per oncia, Luigi non acquista.

$$(1698,96 + 1696,14 + 1688,00 + 1697,55 + 1705,04 + 1691,55 + 1694,05 + 1730,49 + 1729,26 + 1735,94 + 1748,55) : 11 = 1710,50\overline{27}$$

3) Annamaria, dall'equazione generata, potrà dedurre che: all'aumentare dei giorni, aumenta anche la quotazione.

$Y = 1678,22 + 5,37\,x$

x	y
~~0~~	~~1678,22~~
1	1683,59
2	1688,96
3	1694,33
4	1699,70
5	1705,07

Come possiamo osservare dalla tabella, assegnando alla x valori crescenti, la quotazione sarà crescente.

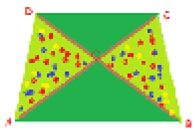
Matematica Senza Frontiere – Competizione 2022 - 2023 punteggio 0

1) SI MARCO RIUSCIRA A VENDERE IL PREZZO DELL' ORO È AUMENTATO DEL 3,29%.

2) NO LUIGI NON COMPRERÀ POICHÈ IL PREZZO ALL' OZ DI MEDIA È DI PIÙ DI 1700

3)

Esercizio n. 8 (5 punti) **Prato e fiori**



Il quesito si basa sull'osservazione geometrica di una figura e l'attenta valutazione dei dati forniti.

Le risposte esaminate evidenziano notevoli differenze fra le classi seconde e terze. Queste ultime hanno ottenuto risultati decisamente inferiori, raggiungendo l'86% di risposte scorrette o mancanti nelle classi terze dei licei non scientifici.

Errori frequenti nel non contemplare i vincoli e scrivere le soluzioni senza motivarle.

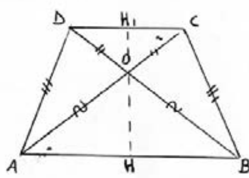
La scarsa performance potrebbe essere imputata alla perdita di competenze nel passaggio dal biennio al triennio?

Eppure i docenti ne hanno riconosciuto la valenza didattica. perché stimola la capacità di risolvere un problema in contesto di realtà sfruttando competenze e conoscenze acquisite e, inoltre, secondo il loro parere (17%) sarebbe stato d'interesse per gli studenti di seconda; interesse confermato dalle risposte degli studenti, però, delle terze (12%).

Complessivamente, sia le seconde sia le terze hanno dichiarato nel 38% delle risposte di aver trovato piacevole la risoluzione operativa. Nonostante ciò hannodichiarato di avere avuto difficoltà nella scelta della procedura risolutoria.

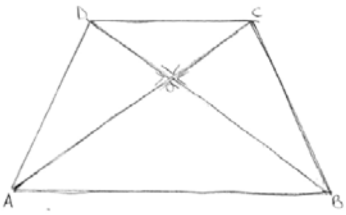
Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

punteggio 5 (Risoluzione corretta e motivata)



Consideriamo le rette parallele passanti per AB e CD:
Le rette per DB e CA formano angoli alterni interni $O\hat{C}D$, $O\hat{D}C$, $O\hat{A}B$, $O\hat{B}A$, tutti congruenti.
Dunque, i triangoli $D\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ sono simili.
Note le loro aree (rispettivamente 32 m² e 50 m²) il rapporto di proporzionalità tra i due triangoli è la √ del rapporto tra le aree, cioè $K = 0,8$.
L'altezza OH è dunque $\frac{100}{AB}$. L'altezza OH_1 è $\frac{64}{DC}$.
Ma CD è uguale a $K \cdot AB = 0,8AB$
quindi l'area del trapezio ABCD è $\frac{(AB+0,8AB)\cdot\left(\frac{100}{AB}+\frac{80}{AB}\right)}{2}$
L'area è dunque 162 m^2
Sottraendo l'area dei triangoli isosceli la cui area è data, capiamo che le parti fiorite misurano 80 m^2 in tutto.

punteggio 4 (Risoluzione corretta ma senza motivazione esauriente)



Consideriamo AOB come triangolo isoscele retto, quindi il suo quadrato ha Area $= 100\,m^2$

$\Rightarrow$ il lato del quadrato ($\overline{OB}$) è uguale a $\sqrt{100} = 10\,m$.

Consideriamo DOC come triangolo isoscele retto, quindi il suo quadrato ha Area $= 64\,m^2$

$\Rightarrow$ il lato del quadrato ($\overline{OC}$) è uguale a $\sqrt{64} = 8\,m$.

I triangoli AOD e BOC sono $\cong$ e hanno: $CO \cong DO = 8\,m$ e $OB \cong OA = 10\,m$

$\rightarrow$ Area ~~8·10~~ di COB che è $\cong$ all'Area di DOA $= \frac{8 \cdot 10}{2} = 40\,m^2$

Le due aree sommate sono uguali a $80\,m^2$.

punteggio 2 Risoluzione impostata correttamente ma inficiata da errore di calcolo)

$D\hat{O}C \cong A\hat{O}B$ perché angoli opposti al vertice

$\begin{cases} DO \cong OC \\ AO \cong OB \end{cases}$ perché diagonali di un trapezio isoscele $\Rightarrow$ DOC è isoscele $\Rightarrow O\hat{D}C \cong D\hat{C}O$; AOB è isoscele $\Rightarrow O\hat{A}B \cong O\hat{B}A$

tracciando le altezze di DOC e AOB, rispettivamente con altezza OH_1 e OH otteniamo due triangoli rettangoli in cui $H\hat{O}B \cong H_1\hat{O}C$ perché l'altezza in un triangolo isoscele corrisponde alla bisettrice (ottenendo $\frac{D\hat{O}C}{2} = \frac{A\hat{O}B}{2}$)

$\Downarrow$

questo significa (ricordiamo somma angoli interni di un triangolo è $180°$) che $D\hat{C}O \cong O\hat{B}A$

$\Downarrow$

dunque AOB è $\sim$ DOC $\Rightarrow \frac{A(AOB)}{A(DOC)} = \frac{50}{32} = \frac{25}{16} = k^2$

$k = \frac{5}{4} = \frac{OH}{OH_1} \begin{matrix} \rightarrow h_1 \\ \rightarrow h_2 \end{matrix}$

definiamo $OH = h_1$, $OH_1 = h_2$ e $X = A_{(DOA)} + A_{(COB)}$

$50 + 32 + X = \frac{(AB + CD) \cdot OH}{2}$ $\qquad AB = \frac{50 \cdot 2}{h_1}$ $\qquad DC = \frac{32 \cdot 2}{h_2}$

$\frac{\left(\frac{100}{h_1} + \frac{64}{h_2}\right)(h_1 + h_2)}{2} = 82 + X \rightarrow \cancel{100} + \cancel{64} + \frac{100 h_2}{h_1} + \frac{64 h_1}{h_2} = \cancel{164} + 2x$

$\overset{20}{\cancel{100}} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} + \overset{16}{\cancel{64}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} = 2x$

perché

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$

$100 + 80 = 2x$

$x = 90$

Risposta

l'area delle zone fiorite è $90\,m^2$

punteggio 0

Le parti fiorite misurano 49 m^2
Abbiamo suddiviso in unità riuscendo
così a trovare l'A totale a cui abbiamo
sottrato 82 m^2 (= AOB+DOC)

Esercizio n. 9 (7 punti) **Dobble fai da te anche con n simboli**

Quesito di osservazione con individuazione di una strategia risolutoria di tipo logico/insiemistico. Non si evidenziano significative differenze fra le varie tipologie di scuola in merito alle diverse casistiche di punteggio: corretto, parzialmente corretto, errato, non svolto.

Il quesito raggiunge un valor medio di risposte positive in circa il 60% dei casi.

Si riportano, a titolo esemplificativo, alcune elaborazioni:

punteggio 7 (Risoluzione corretta, completa e motivata)

Esempio 1 - "schematizzazione chiara da cui si evince generalizzazione"

a)

1	1	2	3
2	4	4	5
3	5	6	6

ogni numero corrisponde ad un diverso simbolo e il numero delle colonne corrisponde al numero delle carte. Volevo necessito quindi di 6 simboli divisi in 4 carte.

b)

1	1	2	3	4
2	5	5	6	7
3	6	8	8	9
4	7	9	10	10

Servono quindi 10 simboli divisi in 5 carte.

c) Immaginiamo lo stesso schema considerandolo come un rettangolo

$$\begin{array}{cc} & n+1 \\ n & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right] \end{array}$$

È possibile generalizzare il discorso calcolando l'area del rettangolo e dividendola per 2 (ogni simbolo compare 2 volte). Viene quindi $\frac{n(n+1)}{2}$

Esempio 2 - "Ottima argomentazione + ragionamento già sul caso generale per ricavare poi i due particolari"

Chiamo n = n° simboli su una carta.
Presa la prima carta con n simboli, siccome la seconda carta deve avere un simbolo in comune, avra' n-1 simboli nuovi. Analogamente, la terza carta deve avere un simbolo in comune con la I e la II carta, quindi avra' n-2 simboli nuovi.
Generalizzando, ogni carta ha (n-i) nuovi simboli, con i che va da 0 (caso della I carta) a n (caso dell'ultima carta, che ha quindi 0 nuovi simboli).
Algebricamente, chiamato S il numero totale di simboli,

$$S = \sum_{i=0}^{n} (n-i)$$

Data la prima carta con n simboli, per le richieste del gioco, devono esistere un numero n di carte tali che ogni simbolo venga ripetuto 2 volte e che sia in comune con un simbolo della prima carta. Quindi il numero di carte (c) sara' 1 (la prima) + n (tutte le carte con in comune un simbolo con la prima).

$C = n+1$

I. se $n=3$, $S = \sum_{i=0}^{3} (n-i) = (n-0)+(n-1)+(n-2)+(n-3) = 3+2+1+0 = 6$

$C = n+1 = 3+1 = 4$

II. se $n=4$, $S = \sum_{i=0}^{4} (n-i) = (n-0)+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4) = 4+3+2+1+0 = 10$

$C = n+1 = 5$

punteggio 6 (Risoluzione corretta, completa e motivata, penalità di un punto per omissione di opportuna motivazione. "non spiegano come arrivano a generalizzazione nell'ultima domanda)

a) Valeria avrà bisogno di 6 simboli comporranno 4 carte

esempio:

1- A B C
2- A D E
3- B D F
4- C E F

b) Se su ciascuna carta comparissero 4 simboli, Valeria avrà bisogno di 10 simboli che comporranno 5 carte

esempio:

1- A B C D
2- A E F G
3- B E H I
4- C F H L
5- D G I L

c) se su ciascuna carta comparissero n simboli con $n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$ il numero di carte sarà $n+1$ e il numero di simboli totali sarà $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$

punteggio 5 (Risoluzione corretta, completa e motivata, penalità di 2 punti: "un punto perché non spiegano in modo esaustivo come ottengono generalizzazione nella terza risposta, il secondo perché non esplicitano il numero totale di carte nel caso generale, ma lo riportano solo in alcuni esempi.")

a) 1 2 3 — 1 4 5 — 2 4 6 — 3 5 6

Il n di simboli necessari (con 3 simboli per carta) è 6, e il n di carte totali è 4.

b) 1 2 3 4 — 1 5 6 7 — 2 5 8 9 — 3 6 8 10 — 4 7 9 10

Con 4 simboli per carta sono necessari 10 simboli e 5 carte.

c) In questo caso si deve utilizzare la formula del termine triangolare, cioè $a_{n-1}+n$

TABELLA RISULTATI:

n. simb.	3	6	10	15	21
n. carte	3	4	5	6	7
n. simboli x carta	2	3	4	5	6

punteggio 4

“Risoluzione con tutte e tre le risposte corrette ma non motivate”

a) Sei simboli e quattro carte

b) dieci simboli e cinque carte

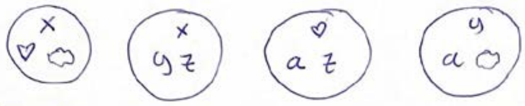
c) Per trovare il numero di carte nel mazzo si usa la seguente espressione : n simboli + 1

Per trovare il numero totale di simboli uso l'espressione

$[(n+1):2]\cdot n$

“Risoluzione con le risposte alle prime due domande corrette e motivate”

a) PER OGNI CARTA ABBIAMO 3 SIMBOLI DIVERSI E OGNI SIMBOLO SI RIPETE SOLO 2 VOLTE.



POSSIAMO VEDERE CHE IL NUMERO DI SIMBOLI UTILIZZATI È 6 E LE CARTE UTILIZZATE SONO 4

b) x = n° carte del mazzo
a = n° di simboli diversi utilizzati → è uguale a 6 + n° di simboli x carta
y = n° di volte in cui i simboli compaiono
b = n° di simboli per carta

quindi: $x : a = y : b$

$x : 10 = 2 : 4 \qquad x = \frac{10 \cdot 2}{4} = 5$

c) GENERALIZZANDO POSSIAMO UTILIZZARE QUESTA PROPORZIONE: $x : a = y : b$

punteggio 2

"Risoluzione limitata alla risposta alla prima domanda corretta e motivata"

(*Come motivazione è sufficiente mostrare le quattro carte corrette; i conti precedenti al disegno probabilmente sottendono un ragionamento non corretto, che ha portato gli studenti a non riuscire a risolvere i successivi punti.*)

N = 3 SIMBOLI
SIMBOLI = 2
$1 : 3 = 2 : x$
$x = 6$ FIGURE

$2 : 3 = x : 6$
$x = 4$ CARTE

(1 4 3) (2 1 5) (3 2 6) (4 6 5)

"Risoluzione limitata alle risposte alle prime due domande corrette ma non motivate"

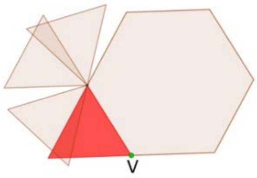
(In questo esempio: nessun punto per la terza perché non ottengono il numero di simboli)

a) HA BISOGNO DI 6 SIMBOLI E IL MAZZO SARÀ COMPOSTO DA 4 CARTE

b) HA BISOGNO DI 10 SIMBOLI E IL MAZZO SARÀ COMPOSTO DA 5 CARTE

c) $n \geq 2$ n = NUMERO DI SIMBOLI
NUMERO DI CARTE = $n + 1$

Esercizio n. 10 (10 punti) **Tracce**



Il quesito, basato sulla percezione visuo-spaziale e sull'applicazione delle formule geometriche relative alla circonferenza, ha avuto esiti compositi.

Le medie generali delle risposte nulle e delle non risposte superano il 60%, sia nelle classi seconde sia nelle terze.
In una analisi più specifica, le percentuali raggiungono quasi il 90% nei licei non scientifici e negli istituti professionali. Migliori esiti si evidenziano, però, relativamente alle classi degli istituti tecnici tecnologici e dei licei scientifici.

La difficoltà incontrata nella risoluzione del quesito potrebbe risiedere nell'errata interpretazione del testo, che ha indotto gli studenti a considerare la semplice rotazione del triangolo attorno a un punto invece del movimento completo attorno all'isoscele regolare.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **Origami di base**

Quesito di tipo logico percettivo e operativo si presta a far emergere talenti creativi; richiede decodifica di un origami e calcolo di una superficie in funzione del lato del quadrato di carta di partenza.

Affrontato, complessivamente, dal 78% delle classi con esiti massimi nel 34% e, nei licei scientifici con il 52%, è piaciuto agli studenti che non lo hanno giudicato difficile apprezzandone l'originalità.

Esercizio n. 12 (7 punti) **Per la festa di fine estate**

L'esercizio di tipo logico verbale, richiede soluzione geometrica con solo l'originalità dell'applicazione in una situazione reale, ha dato esiti complessivamente negativi, non ipotizzabili nelle classi terze, come gli errori nell'impostazione dell'equazione risolvente, primo passaggio cruciale della risoluzione, per non considerare l'assenza di analisi critica delle soluzioni rispetto alla loro accettabilità o meno.

Dalle risposte ai questionari è emersa difficoltà generalizzata nella scelta della procedura risolutoria motivata da mancanze di conoscenze teoriche relative. (35%), confermata dai docenti nel 19,6% delle risposte.

E' risultato come esiti il peggiore con ben il 96% di esiti nulli (62% di non risposte e 34% di punteggio zero) senza alcun punteggio massimo. Tali risultati devono far riflettere sulla necessità di pianificare interventi mirati a contestualizzare in situazioni reali lo studio e, con tale riferimento, la geometria sia nel piano sia nello spazio.

Al di là degli errori, già sopra citati, di cui alcuni che denotano gravi carenze, la preoccupazione maggiore è il rilievo dell'incapacità di visione spaziale.

Si riportano alcune soluzioni esemplificative:

punteggio 5 (Risoluzione limitata alla prima domanda corretta e motivata con, per la seconda domanda, considerazioni corrette ma senza conclusione) innanzitutto calcoliamo il volume della sfera: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{500}{3}\pi u^3$

sapendo che il volume del cono è $27\pi u^3$, che è uguale a $\overline{HB}^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{VH}$, possiamo dire che $\overline{HB}^2 \cdot \overline{VH} = 81 u^3$. Poniamo $\overline{VH} = x$. $\overline{HB}^2 = (10-x)x$ secondo il teorema di euclide, ovvero $\overline{HB}^2 = \overline{HK} \cdot \overline{VH}$. Otteniamo quindi l'equazione $x^3 - 10x^2 + 81 = 0$
svolgiamo ruffini e vediamo che è uguale a dire $(x-9)(x^2-x-9)$.
Da qui calcoliamo che $x = 9$ o $x = \frac{1+\sqrt{37}}{2}$ poiché sono gli unici due valori compresi tra 0 e 10.
visto che serve la quantità maggiore di polpa, serve che il cono sia il più alto possibile, perciò $\overline{VH} = 9$ cm. sapendo poi che $1l = 571 g$ e che abbiamo trovato il Vgelato in l e che è 525l nel cono. $u = 0{,}35$ cm.

punteggio 4 (Risoluzione limitata alla prima domanda corretta e motivata)

•) $V_c = 27\pi u^3$ $r_s = 5u$
FORMULA VOLUME CONO: $V = \frac{r^2 h \pi}{3}$
CHIAMIAMO y L'INCOGNITA HK $\rightarrow HK = y$
SCRIVIAMO I DATI IN FUNZIONE DI y
CON PITAGORA TROVIAMO IL RAGGIO DEL CONO
$r_c^2 = r_s^2 - (\overline{OH})^2$ SCRIVIAMO OH IN FUNZIONE DI y
$\rightarrow \overline{OH} = r_s - y = 5 - y$
$r_c^2 = 25 - (5-y)^2 = \cancel{y^2 - 10y}\ 10y - y^2$
SCRIVIAMO h_{cono} IN FUNZIONE DI $y \rightarrow h_c = 2r_s - y = 10 - y$
SOSTITUIAMO NELLA FORMULA:
$$27\cancel{\pi} = \frac{(\overset{10y-y^2}{\cancel{y^2-10y}})(10-y)\cancel{\pi}}{3}$$
$81 =$
$\cancel{81} = y^3 - 10y^2 + 100y - 10y^2$
$\rightarrow y^3 - 20y^2 + 100y - 81 = 0$
TROVIAMO 3 SOLUZIONI: $y_1 \simeq 12{,}5 \rightarrow$ IMPOSSIBILE PERCHÉ NON PUÒ ESSERE MAGGIORE DEL DIAMETRO DELLA SFERA
$y_2 \simeq 6{,}5$ ~~IMPOSSIBILE~~
$y_3 \simeq 1$

$V = 1L$ per m di GELATO $= 571 g \Rightarrow 0{,}571 Kg$
$1L = 1dm^3 \Rightarrow 1dm^3 = 0{,}001 m^3$
CALCOLIAMO LA DENSITÀ
$d = \frac{m}{V} = \frac{0{,}571}{0{,}001} = 571\ Kg/m^3$

La DENSITÀ RIMANE UGUALE al VARIARE di MASSA e VOLUME PERCIÒ
$571 = \frac{3 Kg}{27\pi u^3}$
$571 \cdot 27\pi u^3 = 3$
$48433 u^3 = 3$
$u = \sqrt[3]{\frac{3}{48433}} = \sqrt[3]{\frac{1}{50000}} = 36{,}8$

punteggio 3 (Risoluzione limitata alla prima domanda con impostazione corretta, con individuazione corretta dei due valori di x, ma errore nella scelta del valore più opportuno per l'altezza della calotta)

a) $\overline{HK} = x$

se il raggio $= 5u \Rightarrow$ ~~di~~ $0 \leq x \leq 5$

se C è il centro della circonferenza, trovare $\overline{HC}$ in funzione di x.

$\overline{HC} = r - x = 5 - x$

trovare $\overline{HB}$

per il teorema di Pitagora, $\overline{HB} = \sqrt{CB^2 - HC^2}$

$\Rightarrow \overline{HB} = \sqrt{r^2 - (5-x)^2} = \sqrt{25 - 25 + 10x - x^2} = \sqrt{10x - x^2}$

il volume del cono con diametro $\overline{AB}$ e altezza $\overline{VH} = 27\pi u^3$

$\overline{VH} = \text{diametro} - x = 10 - x$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \overline{HB}^2 \cdot \overline{VH} = 27\pi \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(10x - x^2)(10 - x) = 27\pi \Rightarrow (10x - x^2)(10 - x) = 81$

$\Rightarrow x^3 - 20x^2 + 100x - 81 = 0$

per il teorema di Ruffini, $\frac{p}{q} = 1$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -20 & 100 & -81 \\ 1 & & 1 & -19 & 81 \\ \hline & 1 & -19 & 81 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-1) \cdot (x^2 - 19x + 81) = 0$$

$x = 1$ ✓

$\Delta = 361 - 324 = 37$

$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{37}}{2} = 6{,}46 \;\; 12{,}54$

ma per le C.E., $0 \leq x \leq 5$, quindi $x = 1 \Rightarrow \overline{HK} = 1u$

b) se $1\ell = 571g \Rightarrow 1\ell : 571g = x : 3000g$ con x = volume di 3kg di gelato

$x = \frac{3000g \cdot 1\ell}{571g} = 5{,}25\ell$

ma il volume di 3kg di gelato $= 27\pi u^3$

$\Rightarrow 5{,}25\ell = 27\pi u^3 \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{5{,}25\ell}{27\pi}} = 0{,}396\sqrt[3]{\ell}$

$1\ell = 1dm^3 \Rightarrow 0{,}396\sqrt[3]{dm^3} \Rightarrow u = 0{,}396\,dm$

punteggio 0

$\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot (AB - HK) = 27\pi u^3$

$d = 10u$

$\pi\left(\frac{10u}{2}\right)^2 (10u - HB) = 27u^3\pi$

$25\pi u^2 (10u - HB) = 27\pi u^3$

$250\pi u^3 - 27\pi u^3 = 25\pi u^2 HB$

$\overline{HB} = \frac{223\pi u^3}{25\pi u^2} = \overline{HB} = 8{,}92u$

Esercizio n. 13 (10 punti) **Il Borgorosso F. C.**

Nel 13% dei questionari dei docenti questo quesito è stato giudicato d’interesse per gli studenti le cui risposte lo hanno confermato con quasi la stessa percentuale.
I risultati delle classi sono stati omogeneamente distribuiti: alta la percentuale di risoluzioni (93%) con una considerevole percentuale do massimi (complessivamente il 41%)

Si riportano alcune soluzioni esemplificative:

punteggio 10 (Risoluzione corretta, completa e con giustificazione alla seconda risposta)

Cominciamo il ragionamento sulla base delle certezze che si evincono dal testo fornito.

La Società Borgorosso F.C.:

- a fine campionato ha totalizzato 76 punti
- ha perso almeno 4 partite
- ha pareggiato almeno una partita
- nelle ultime 33 ha raccolto 75 punti.

a. Per calcolare la media punti a partita nelle ultime 33 gare disputate dobbiamo dividere i punti ottenuti per il numero di incontri giocati:
$75 : 33 = 2,\overline{27}$ punti a partita

b. Avvalendoci delle certezze elencate, ipotizziamo le possibili combinazioni di vittorie (V), pareggi (P) e sconfitte (S).
Considerato che in tutto il campionato la squadra ha conquistato 76 punti, è matematicamente impossibile che abbia vinto 26 o più partite:
$26 \cdot 3 = 78 \quad \underset{\text{pareggio}}{78 + 1} = 79 \quad 79 > 76$

È evidente che il numero massimo di vittorie possibile è 25:
$(25 \cdot 3) + 1 = 76 \rightarrow$ 25 V 1 P 12 S

Ora cerchiamo il numero minimo di vittorie possibile considerando che la squadra ha perso almeno 4 partite (tutti i casi con meno di 4 sconfitte non si possono considerare).
Il minor numero possibile di vittorie con il quale le condizioni sopra elencate sono soddisfatte è 21. (V=21)
$76 - (21 \cdot 3) = 13$ (P) $\rightarrow$ 21 V 13 P 4 S
I casi, per cui la squadra può aver totalizzato 76 punti, sono 5: i 2 sopra riportati e quelli con le vittorie comprese tra 21 e 25.

punteggio 8 (Risoluzione corretta, completa ma con seconda risposta limitata a una situazione teorica)

a) Dopo aver giocato le 38 partite complessive del campionato, la media dei punti totali ottenuti è 2, quindi per ricavare il numero di punti risolviamo l'equazione

$\frac{p}{38} = 2$ (p = punti totali ottenuti)

$p = 2 \cdot 38$
$p = 76$

Per ottenere la media dei punti a partita delle ultime 33 partite sottraiamo 1 punto ottenuto nelle prime 5 ai totali 76 punti. Quindi la media sarà $\frac{75}{33} = 2,3$.

b) I 76 punti totali sono il risultato della somma dei punti ottenuti nelle partite vinte ($3x$), pareggiate ($1y$) e perse ($0z$). Quindi $\frac{3x + 1y + 0z}{38} = 2$

$\frac{3x + 1y}{38} = 2$

Il nr. di partite perse z è uguale alla differenza tra le partite giocate totali (38) e la somma tra quelle perse e vinte $(x+y)$. Quindi $z = 38 - (x+y)$

$y \geq 1$ (perché nelle prime 5 partite, 1 è stata pareggiata)
$z \geq 4$ (perché " " " ", 4 sono state perse)

Mettiamo a sistema

~~con x = partite vinte~~

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{38} = 2 \\ z = 38 - (x+y) \\ y \geq 1 \\ z \geq 4 \end{cases} \longrightarrow 3x + y = 76$$

Quindi una possibile soluzione di x può essere 6, di y per forza quindi 20, z quindi $38 - (x+y)$, dunque 12

$x = 22$
$y = 10$
$z = 6$

punteggio 6 (Risoluzione corretta limitata alla seconda risposta completa)

b) Abbiamo calcolato il totale dei punti ~~che~~ che, siccome la media dei punti a partita è 2, doveva essere uguale al numero di partite moltiplicato per 2. Poi abbiamo trovato ~~tra~~ le combinazioni Vittorie, Pareggi, Sconfitte

COMBINAZIONE 1		COMBINAZIONE 2	
12 sconfitte = 0 pt.		4 sconfitte = 0 pt	
1 pareggio = 1 pt.		13 pareggi = 13 pt	
25 vittorie = 75 pt.		21 vittorie = 63 pt	
38 partite giocate	76 pt. totali	38 partite giocate	76 pt. totali.

d) Abbiamo sottratto il punto segnato nelle prime 5 partite al totale e abbiamo sottratto 5 al numero delle partite totali. Poi abbiamo diviso il nuovo totale dei punti per il nuovo totale delle partite, trovando la nuova media dei punti.

punteggio 3 (Risoluzione limitata alla prima risposta corretta)

a) 38 · 2 = 76 pt fine campionato

partite tot = 38

prime 5 = 1 pt

media 38 partite = 2

m.p. = 33 = $\frac{75}{33}$ = 2,27 pt per le 33 dispute succ

b)

Facendo una media e un grafico

il risultato esce

4 partite perse 21 vinte 13 pareggiate

Questo è il risultato più probabile

punteggio 0

2 punti | partita

38 partite

38 · 2 = 76 punti totali

76 − 1 = 75

75 : 33 = 2,2