La géométrie du compas
de Lorenzo Mascheroni

Adriana Gnudi

Università degli studi di Bergamo

La vie

- Lorenzo Mascheroni est né à Castagneta dans la province de Bergame, le 13 mai 1750 par Paul et Mary Cerimelli, une famille de propriétaires terriens riches. Dès son jeune âge, il a montré des qualités exceptionnelles dans l'étude. Le 28 mai 1774, il fut ordonné prêtre. De 1778, il a enseigné la physique et les mathématiques au séminaire de Bergame et en 1780 a occupé la chaire de philosophie du Collège Marian. En 1786, il a déménagé à Pavie, où il a obtenu la chaire de mathématiques générales, puis celle des mathématiques appliquées. Il sera recteur à deux reprises de l'Université de Pavie et 1888-1891 prince de l'Académie des affiliés.
- Mascheroni ainsi que d'avoir une carrière scientifique et littéraire, il a également eu une politique: en 1797, il a été élu député de la République Cisalpine qui l'a amené à prendre part à Paris en 1798 la commission d'établir de façon permanente la longueur du mètre. Mascheroni vont mourir deux ans plus tard à Paris à l'âge de cinquante ans, à la suite d'une courte maladie.

En raison de la géométrie du compas

Mascheroni se demandait s'il était possible, pour revenir dans le progrès mathématique, développer un domaine encore inexploré. Il a remarqué que , dans les éléments, Euclide pour démontrer sa thèse, il a toujours fait usage de deux outils fondamentaux : le compas et le règle. Il a proposé que le seul compas utiliser pour obtenir les points nécessaires à la construction géométrique; le choix n'a pas été accidentelle, le compas était en fait l'un des instruments les plus précis du temps et moins d'erreurs que le règle.

Au début, il a décidé de classer l'idée du seul compas parce qu'il craignait compliquer les démonstrations et aussi n'a pas vu l’utilisation. Cependant Mascheroni rendu compte que la spécification des constructions géométriques en utilisant uniquement le compas constitué :

... Une branche inexploré par les mathématiciens , qui solutions de semblables seraient généralement ont été pour leur construction le plus élémentaire de l'autre ...

En raison de la géométrie du compas

Le projet a été relancé lors, la lecture de l'article Quart de Cercle murale sur le Encyclopédie méthodique, appris les efforts déployés par les célèbre astronomes anglais Graham et Bird pour exactement diviser le quadrant de ses grands instruments astronomiques et en particulier l'utilisation fréquente du compas dans toutes les grandes opérations géométriques .

Voici la phrase, tirée du livre de la Géométrie Compass, où Mascheroni a exposé les raisons qui l'ont amené à travailler l'écriture :

Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppj sopra le già conosciute nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato di eleganza e la pratica di precisione. Sicché io era al procinto di abbandonare l'impresa. Mentre io era così irresoluto, m'accadde di rileggere la maniera colla quale Graham, e Bird dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici.

En raison de la géométrie du compas

Mascheroni observe que l'utilisation du règle peut être problématique pour deux raisons :

1. Il est impossible de construire un règle longue et parfaitement droite.
2. Prendre un point sur une ligne est une source d'erreurs qui ne sont pas négligeables.

Par rapport à le règle, le compas est beaucoup plus simple instrument à la fois dans l'utilisation et la construction.

A partir du VIe siècle on avaient construit compas très précis:

- compas à charnière pour les petites ouvertures
- compas à verge pour des ouvertures plus larges

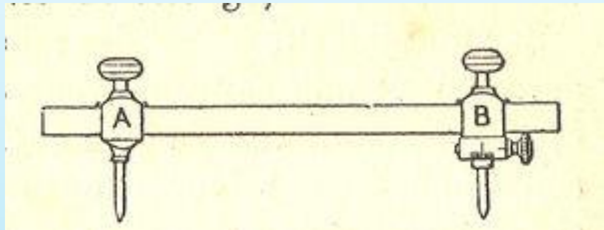


Fig. 73.

Le problème de la division de la circonférence

Un vieux problème pour les fabricants de cadrans pour deux problèmatiques:

- Trouver le long d'un arc donné deux points loin de 90° exactement et ensuite divisé en 90 parties, puis chacune de celles-ci en 60 parties , etc.
- Incision de la division du cercle avec la précision nécessaire.

Tycho Brahe (1576) , il a rigoureusement adressé par le quadrant mural de rayon 2m où, avec échelle tychonic, a été obtenu par la division en 10 sec.

En 1725, George Graham construit par l'astronome Edmond Halley un grand cadran pour l'observatoire de Greenwich (2,4 m.) pour approximations successives et tentatives empiriques . Le cadran est beaucoup plus précis que celui de Brahe en particulier dans le séparateur d'arc obtenu par bissections successives et en utilisant un compas à verge.

Vers 1800, pour Ramsden avec théodolite l'objectif est de ne pas éliminer les erreurs, mais de le faire, ils compenseraient.

Le problème de la division de la circonférence

Mascheroni se fixe l'objectif de dépasser l'approche empirique pour résoudre deux problèmes:

- division d'un cercle en un certain nombre de pièces dépassant 6;
- division du cadran en degrés au lieu de 96 parties (Graham, 1725).

Dans *La géométrie du compas* divise la circonférence

- exactement, en 240 parties et,
- par approximation, en degrés et quarts de degré avec une erreur inférieure à un sixième de seconde et en minutes avec une erreur inférieure à une seconde.

Le théorème de Mohr-Mascheroni

Toute construction géométrique exécutable avec règle et le compas, peut être effectuée à l'aide de seul compas.

Démonstration

La géométrie euclidienne est basée sur l'utilisation combinée des opérations de base suivantes:

1. Tracez un cercle avec un centre donné C et de rayon r;
2. Calculer l' intersection entre les deux cercles;
3. Déterminer l'intersection entre une ligne et une circonférence;
4. Déterminer l'intersection entre deux lignes droites .

- Le théorème est démontré par la preuve que les constructions ci-dessus sont réalisables uniquement avec l'utilisation de seul compas.

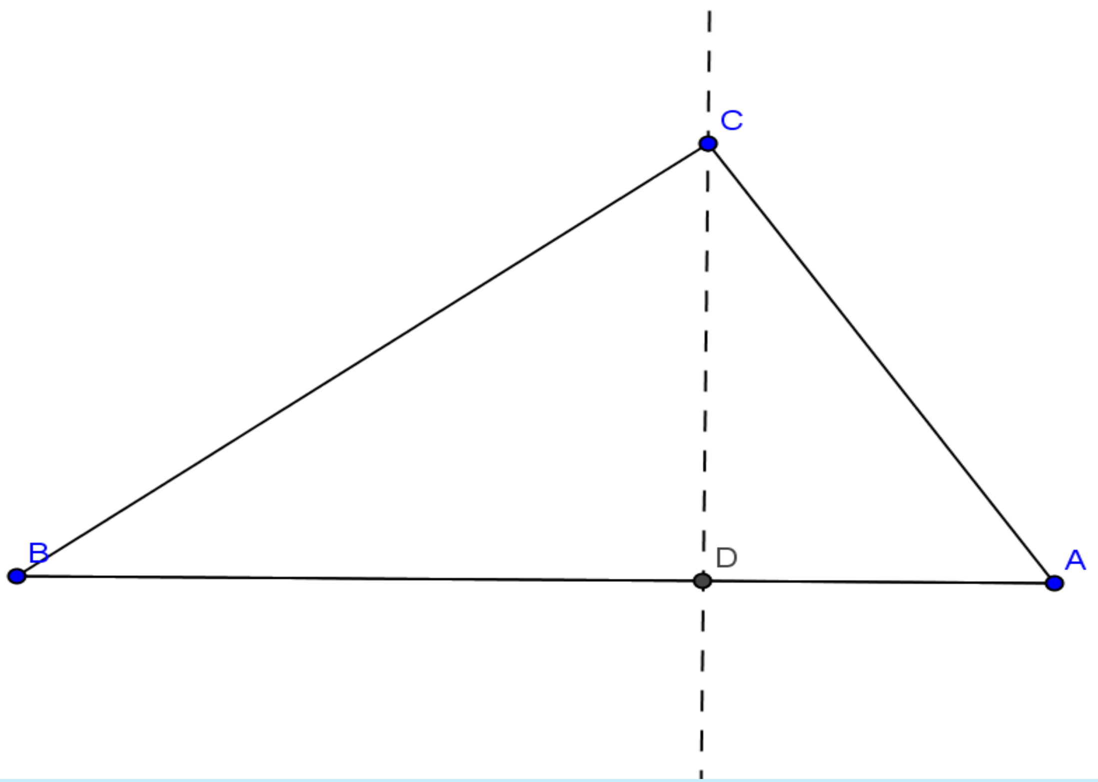
La méthode Mascheroni

Mascheroni se déroule en trois phases

1. Déclarations et démonstrations du théorème principal, des lemmes et des corollaires .
2. Traiter un ensemble d'équations 12 à travers lequel résolvent algébriquement les problèmes géométriques .
3. Les équations sont applicables aux cas individuels .

Le théorème fondamental

$$AB : (BC + CA) = (BC - CA) : (BD - DA)$$



Trois points importants

Par les trois points:

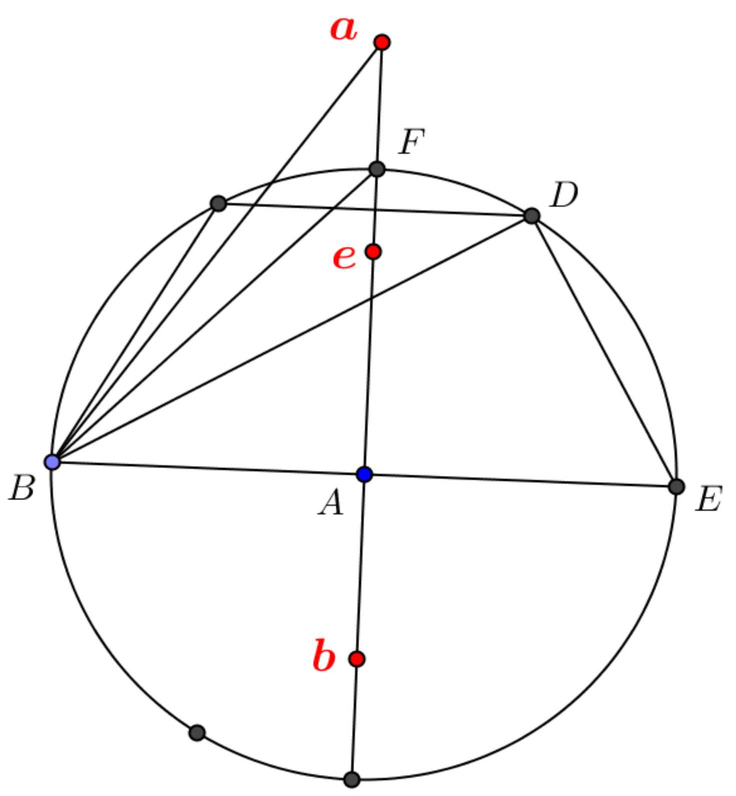
a: à partir de numéro 27 (division de la circonférence des parties égales 4),

b: à partir de numéro 40 (division d'un cercle 5 parties égales),

e: à partir des problèmes 31 (division d'une circonférence de 12 parties égales) et 38 (une division de la circonférence des 48 parties égales),

Mascheroni détermine la 240-ème partie de la circonférence avec seulement cinq ouvertures du compas.

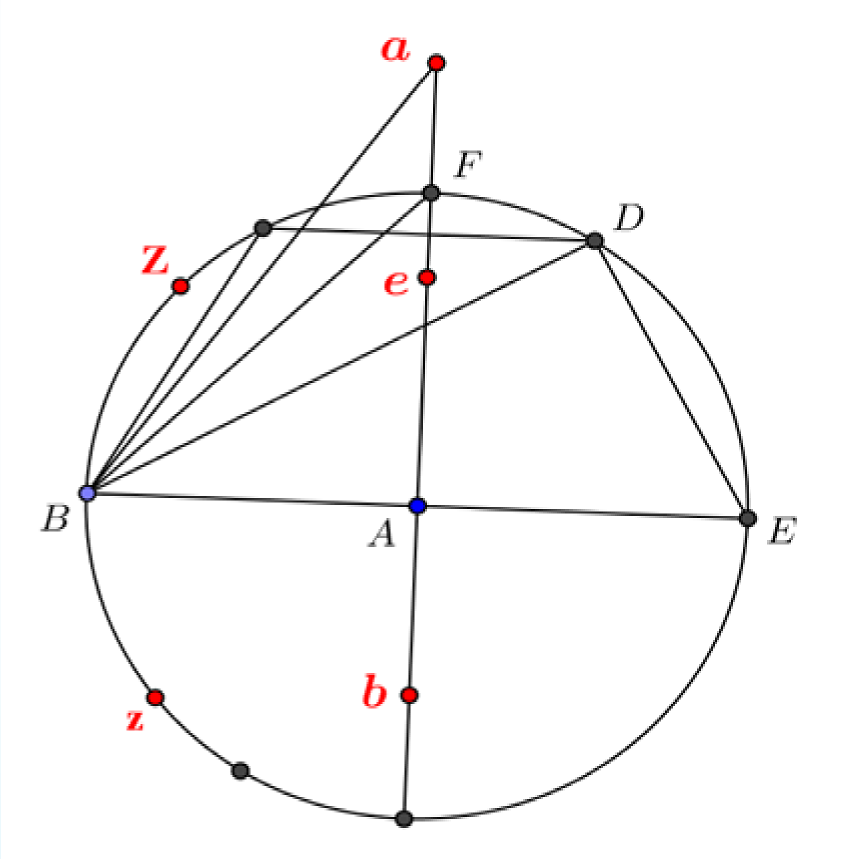
$$A = 1 \Rightarrow Aa = BF = \sqrt{2}\ ,\ Ba = BD = \sqrt{3}$$



Trois équations fondamentales

Mascheroni identifie trois équations fondamentales où les points ***z*** et ***Z*** apparaissent, et apres 12 autres équations permettant de résoudre tous les problèmes.

$$(aZ)^2 = (aB)^2 - Zz \cdot Aa$$
$$(bZ)^2 = (bB)^2 + Zz \cdot Ab$$
$$(eZ)^2 = (eB)^2 - Zz \cdot Ae$$



Structure du livre: 130 problemes, 108 figures

Livre I : préliminaire

Livre II : la division du cercle et les arcs de cercle

Livre III : multiplication et division des distances en ligne droite,

Livre IV : addition et soustraction de distances; la situation de la perpendiculaire et parallèle

Livre V : les distances proportionnelles

Livre VI : radice

Livre VII : de l'intersection des lignes droites et des arcs de cercle entre elles

Livre VIII : la construction et la multiplication et la division des angles et des lignes trigonométriques

Livre IX : de formes similaires et des polygones réguliers

Livre X : centres

Livre XI : diverses questions

Livre XII : par des problèmes d'approximation

Un des problèmes d'approximation

Mascheroni dans problème n°232 détermine de façon approximative l'arc correspondant à un degré moins l’erreur de la moitié d'une seconde:

1. Divisé en 240 parties, chacune correspondant à 1,5°.
2. B = 55° 30' égale à 37 fois la fraction du point 1.
3. Avec l'équation 12, calcule E≈53° avec l'erreur de 0.41 secondes.
4. Divisé en 120 parties, chacune correspondant à 3°.
5. C = 54° égale à 18 fois la fraction du point 4.
6. 1° ≈ 54° - 53° avec l'erreur de 0.41 secondes.

Monographies sur le sujet

[1] O. Byrne. *The Geometry of Compasses: Or Problems Resolved By The Mere Description Of Circles*. Crosby, Lockwood, and Co., 1877.

[2] H. Geppert. Georg Mohr e la Geometria del Compasso. *Periodico di Matematiche*, IX:149–160, 1929.

[3] A. Kostovskii. *Geometrical constructions with compasses only*. Mir Publishers, Moscow, 1986.

[4] L. Mascheroni. *La Geometria del Compasso*. Eredi Pietro Galeazzi, 1797. Ristampa anastatica di Moretti & Vitali, a cura di Giorgio Mirandola.

[5] G. Mohr. *Euclides Danicus*. 1672.

[6] A. Quemper de Lanascol. *Géométrie du Compas*. Librarie Scientifique Albert Blanchard, 1925.

[7] Capitano Sacchi. *Problemi di Geometria dell'abate Lorenzo Mascheroni*. Giovanni Silvestri, Milano, III edition, 1832.

Le projet «Mascheroni rencontre GeoGebra»

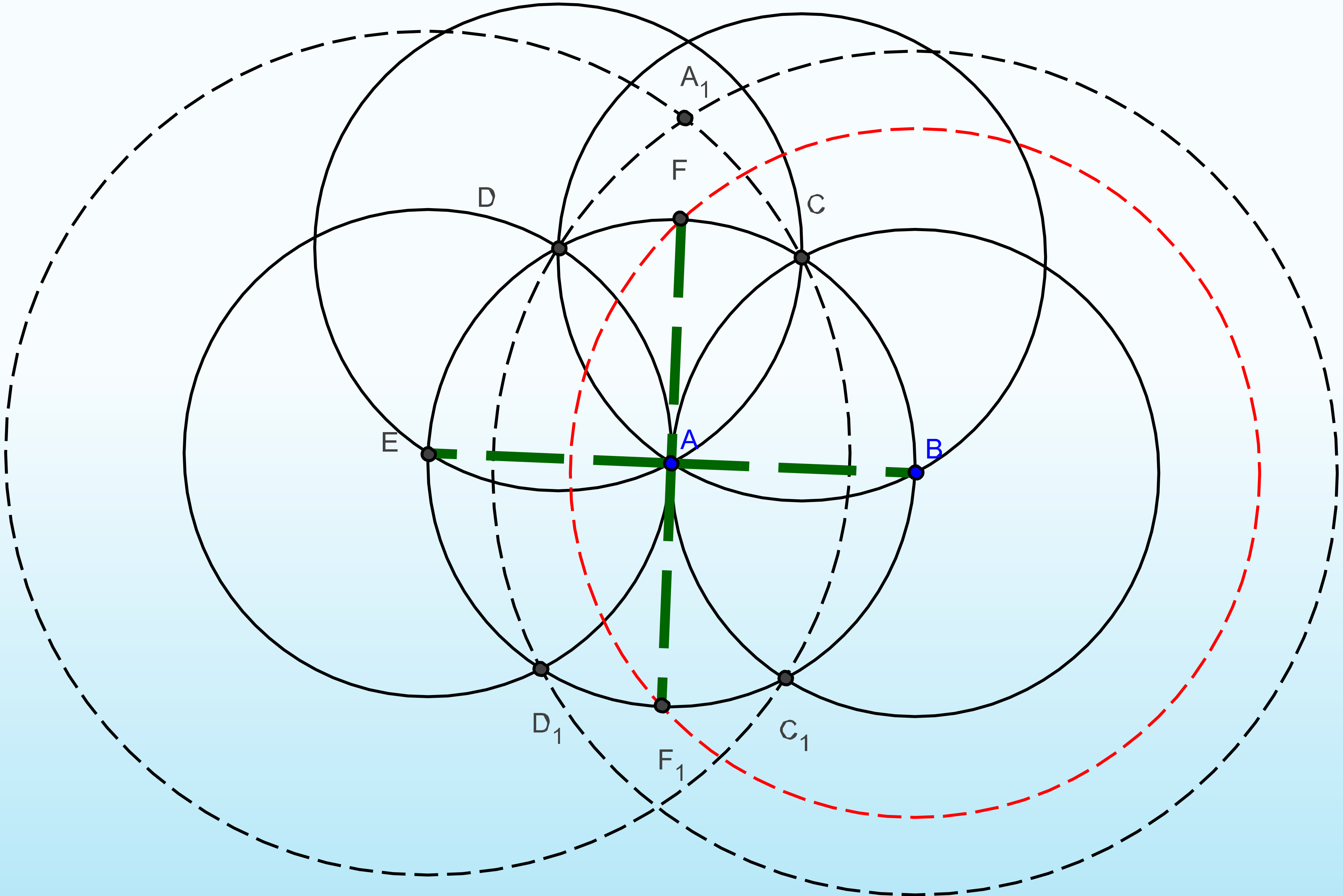
- Deux étudiants, Federico Fabrizi et Pietro Pennestri, de Lycée Newton à Rome, commence par une recherche de quelques figures géométriques, coordonnés par le professeur Naomi Stivali.
- 20 mai 2011 est fondée le Mascheroni CAD équipe dans le but de la construire toute le figures en utilisant GeoGebra, en suivant les instructions originales de Mascheroni, avec seulement quatre constructions principaux.
- Au cours du travail, ils on rencontré quelques difficultés: les dessins, une partie fondamentale du travail, sont souvent difficiles à interpréter. Les algorithmes, comme écrit dans un italien ancien, plusieurs fois sont difficiles à interpréter.
- GeoGebra a prouvé un outil parfait pour signaler et interpréter de façon moderne tous les constructions de la géométrie du compas de Mascheroni.

Le projet «Mascheroni rencontre GeoGebra»

- Le désir de documenter leur travail, même avec multimédia, a motivés Federico et Pietro les pour se familiariser avec d'autres logiciels.
- En particulier, ils on téléchargé quelques vidéos que ils on fait sur la chaîne YouTube Équipe CAD Mascheroni.
- Afin de rendre accessible à tous intéressés du travail, ils on également créé un site Web à partir de laquelle on peut télécharger tous les fichiers GeoGebra et le fichier pdf connexe contenant les algorithmes des constructions:

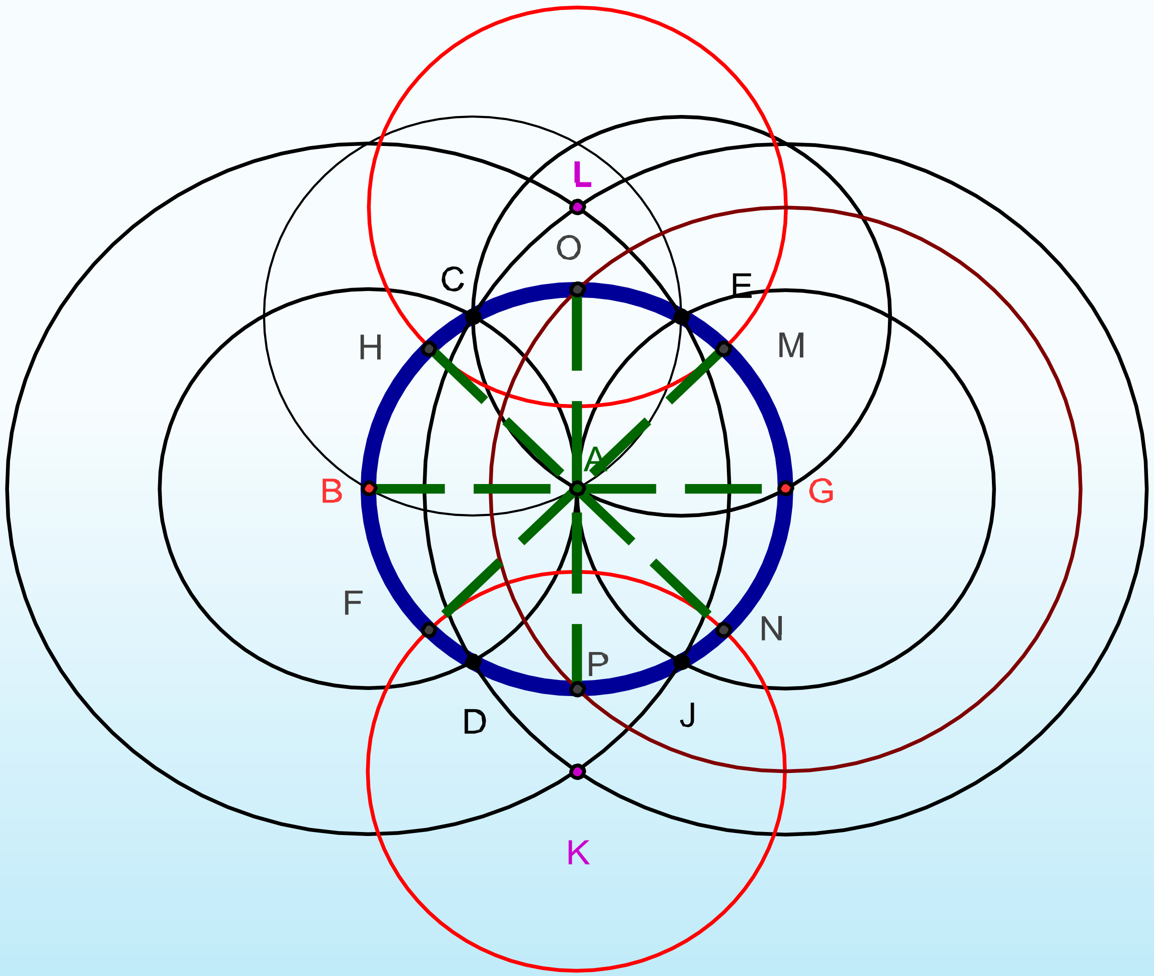
http://www.geogebraitalia.org/

Dividere una circonferenza *a* in 4 parti uguali con l'ausilio del solo compasso
Libro secondo, pag. 14 §27, [4]



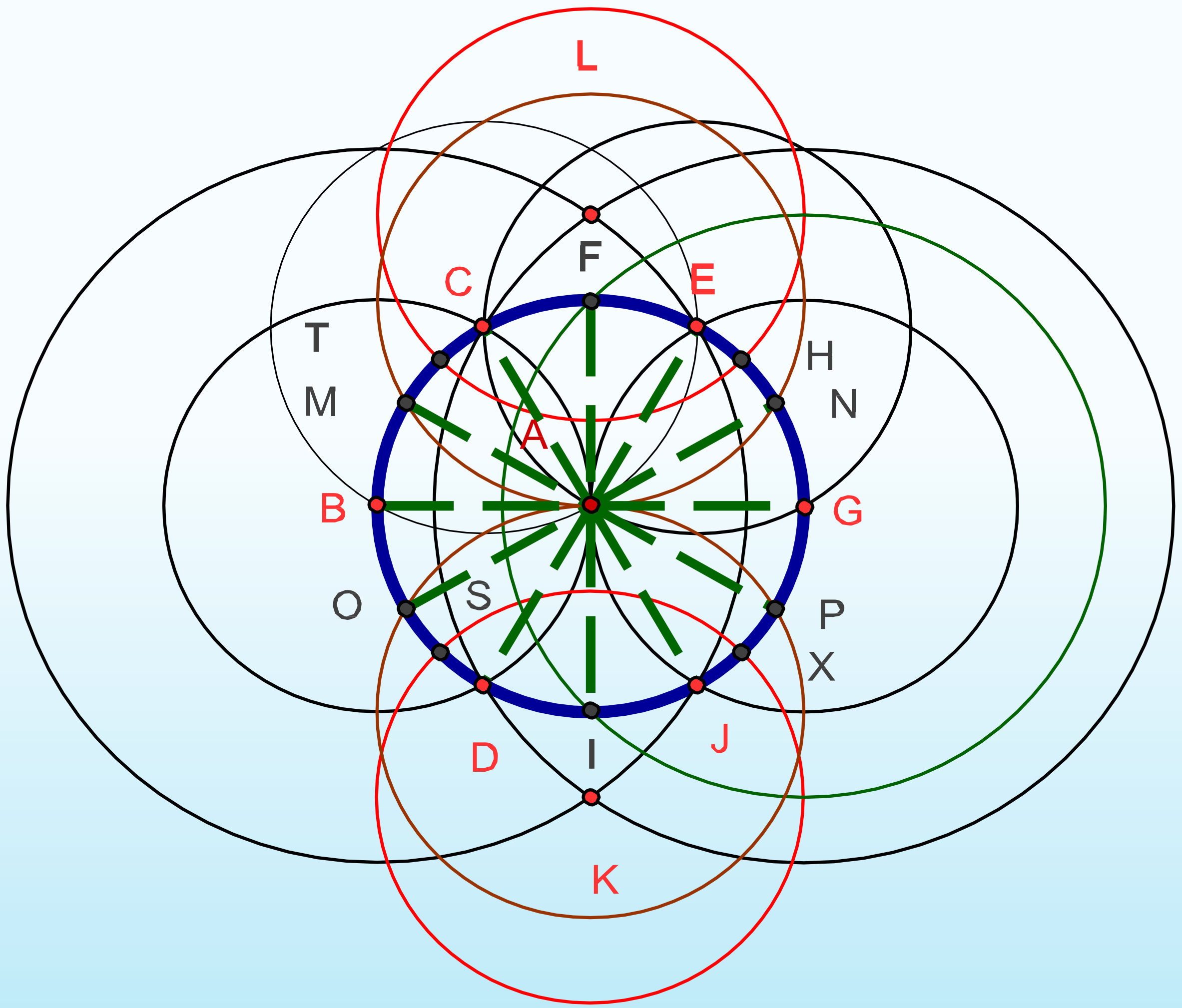
Dividere una circonferenza *a*, con l'ausilio del solo compasso, in 8 parti congruenti

Riferimento: Libro secondo, pag. 16 §30,[4]



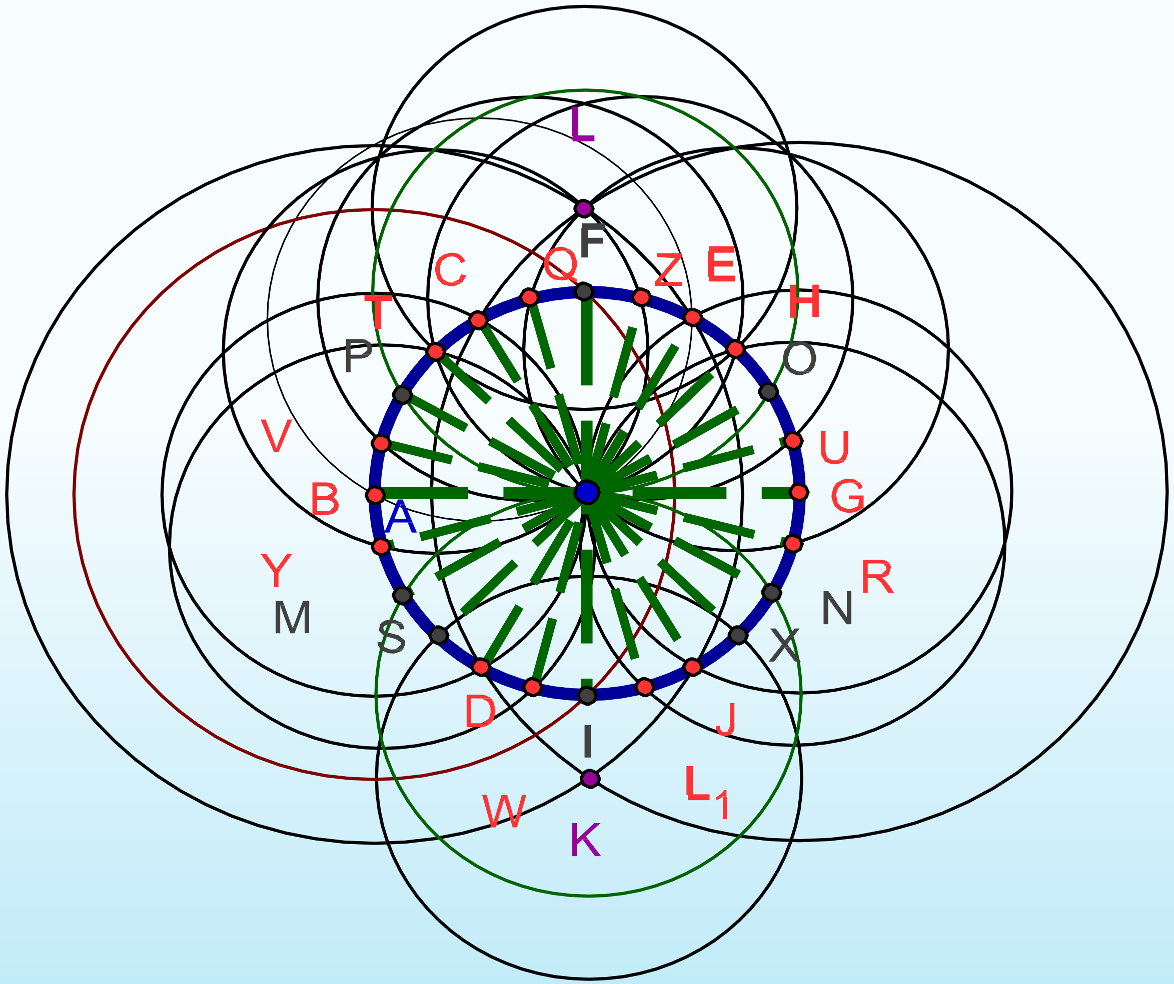
Data una circonferenza *a*, con l'ausilio del solo compasso dividerla in 12 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 17 §31, [4]



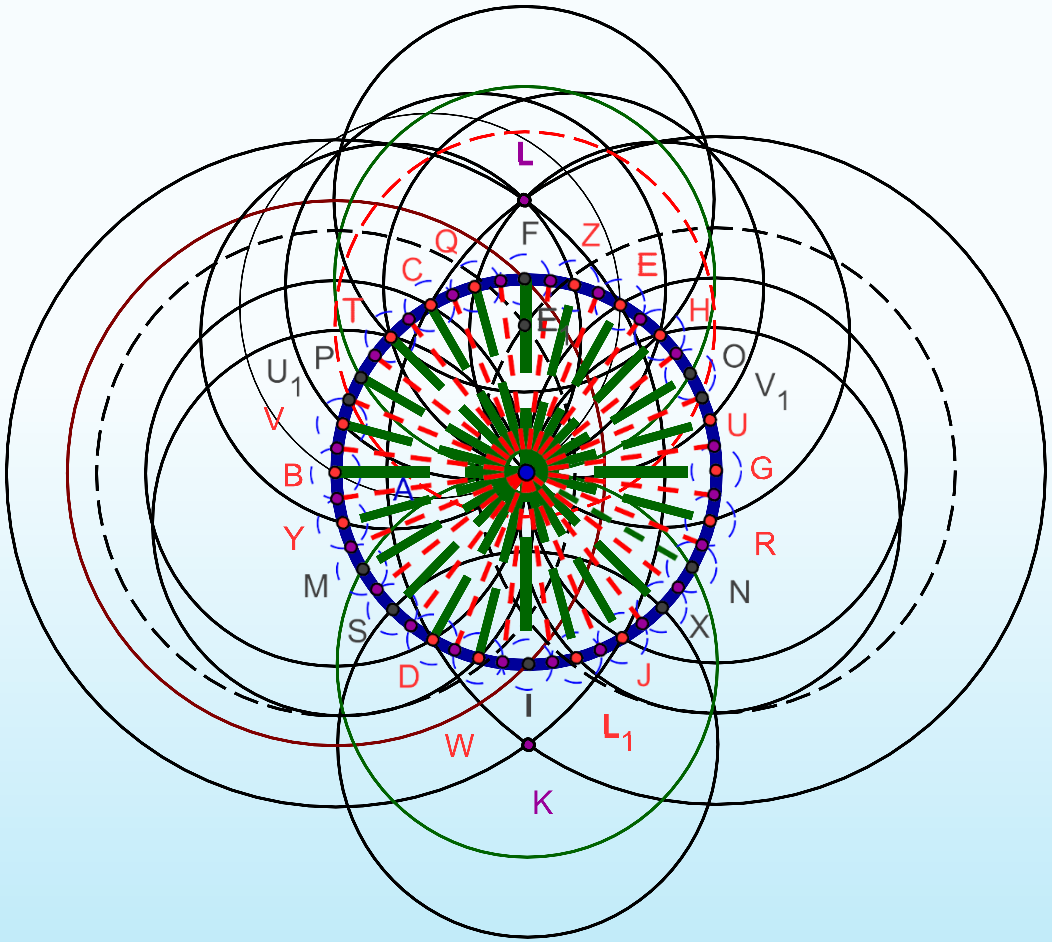
Data una circonferenza *a*, con l'ausilio del solo compasso, dividerla i 24 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 18 §32, [4]



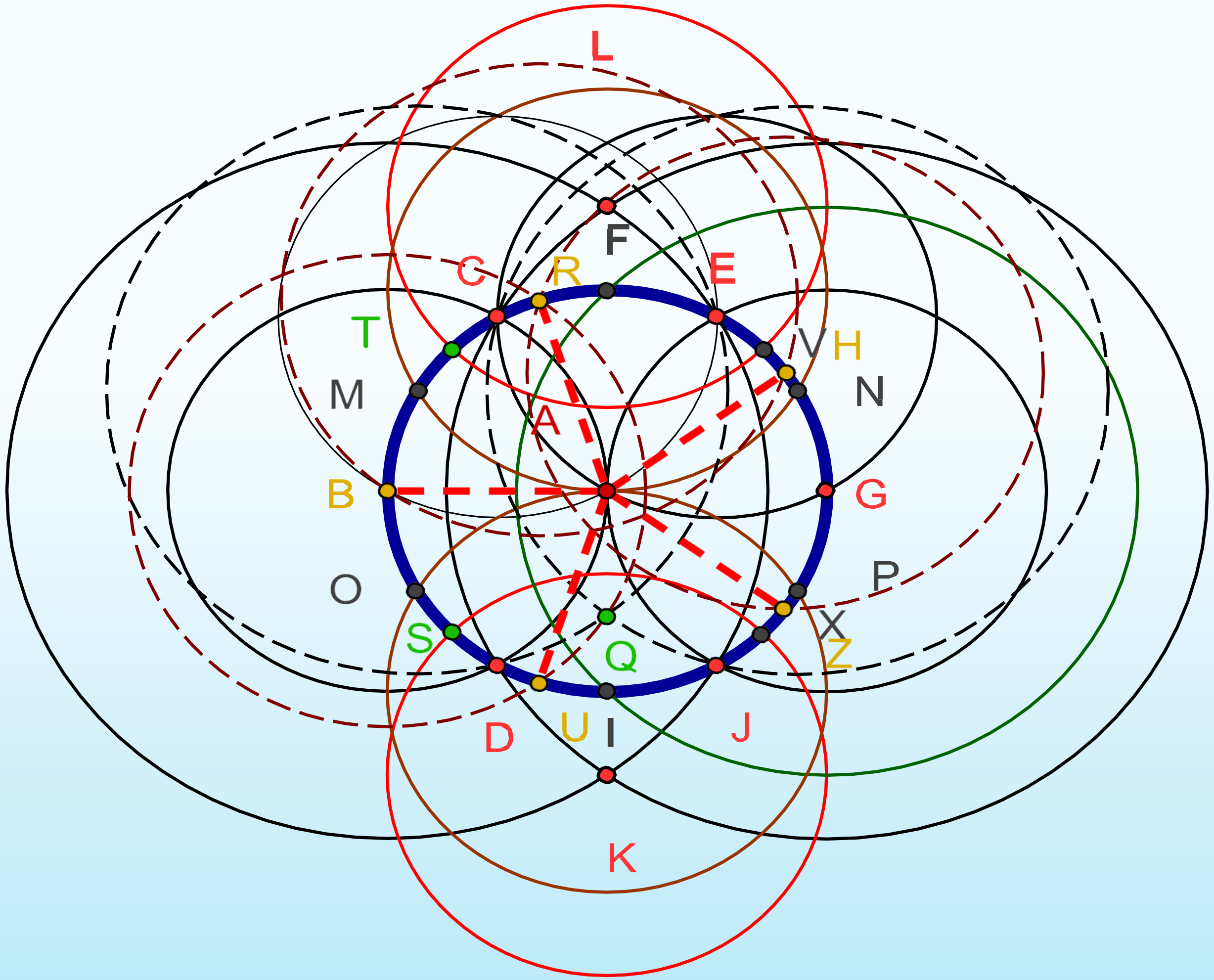
Data una circonferenza *a*, con l’ausilio del solo compasso, dividerla i 48 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 20 §38, [4]



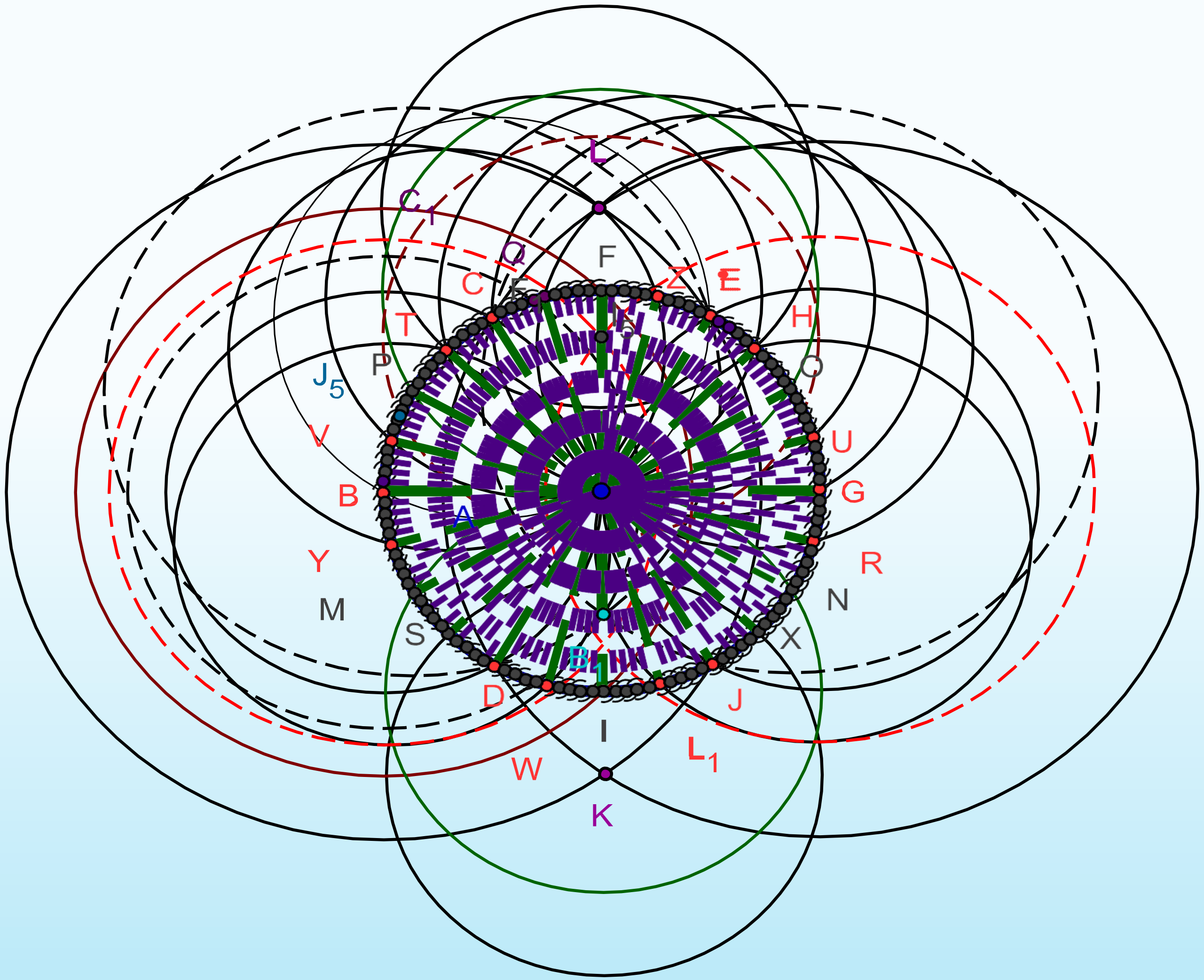
Data una circonferenza *a*, con l’ausilio del solo compasso dividerla in 5 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 23 §40, [4]



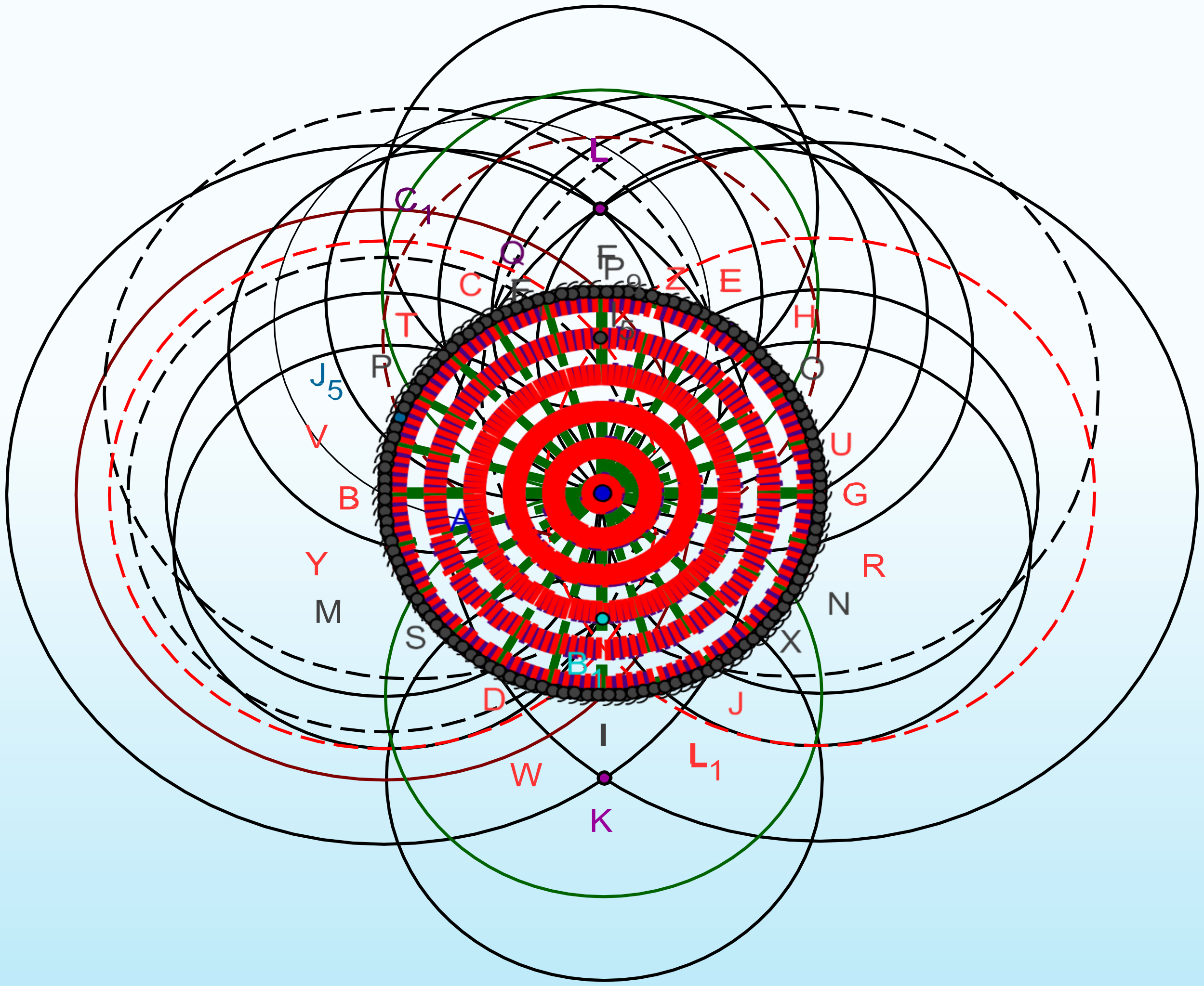
Data una circonferenza *a*, con l'ausilio del solo compasso, dividerla in 120 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 25 §42, [4]



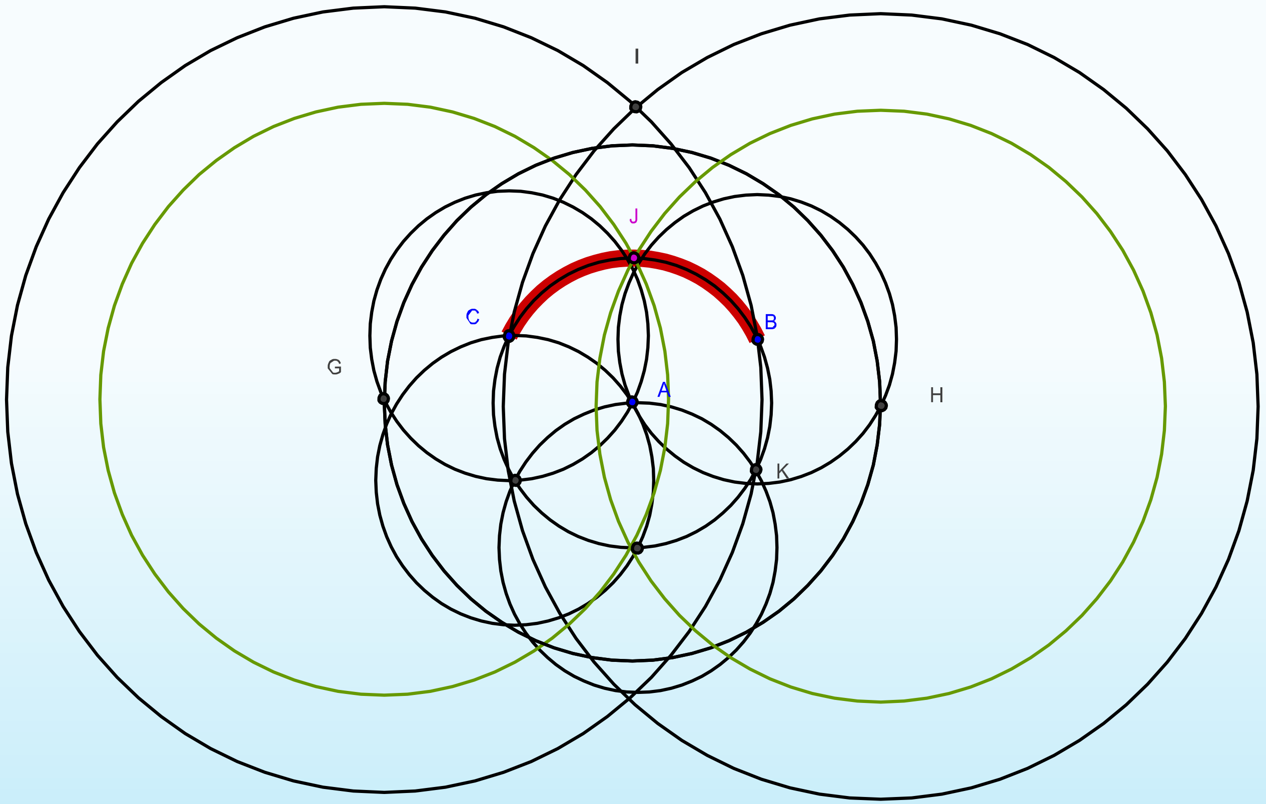
Data una circonferenza *a*, con l’ausilio del solo compasso dividerla in 240 parti congruenti.

Riferimento: Libro secondo, pag. 31 §57, [4]



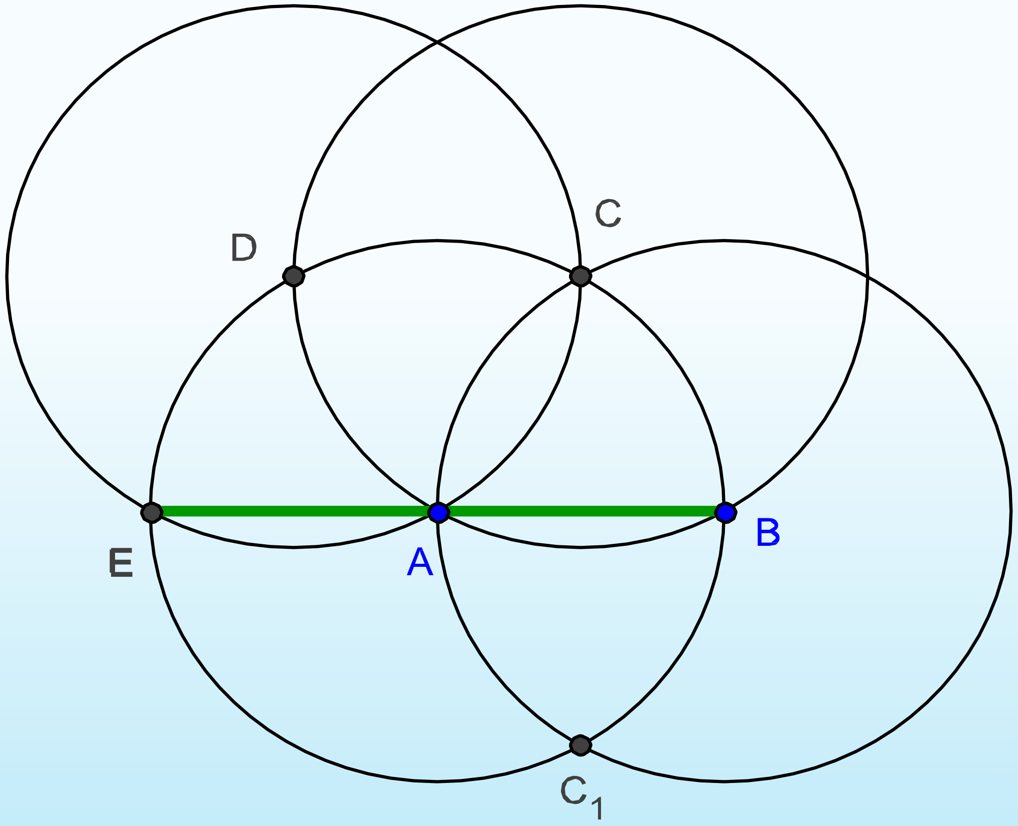
Dividere un arco *CB* in due parti congruenti

Riferimento: Libro secondo, pag. 33 §60, [4]



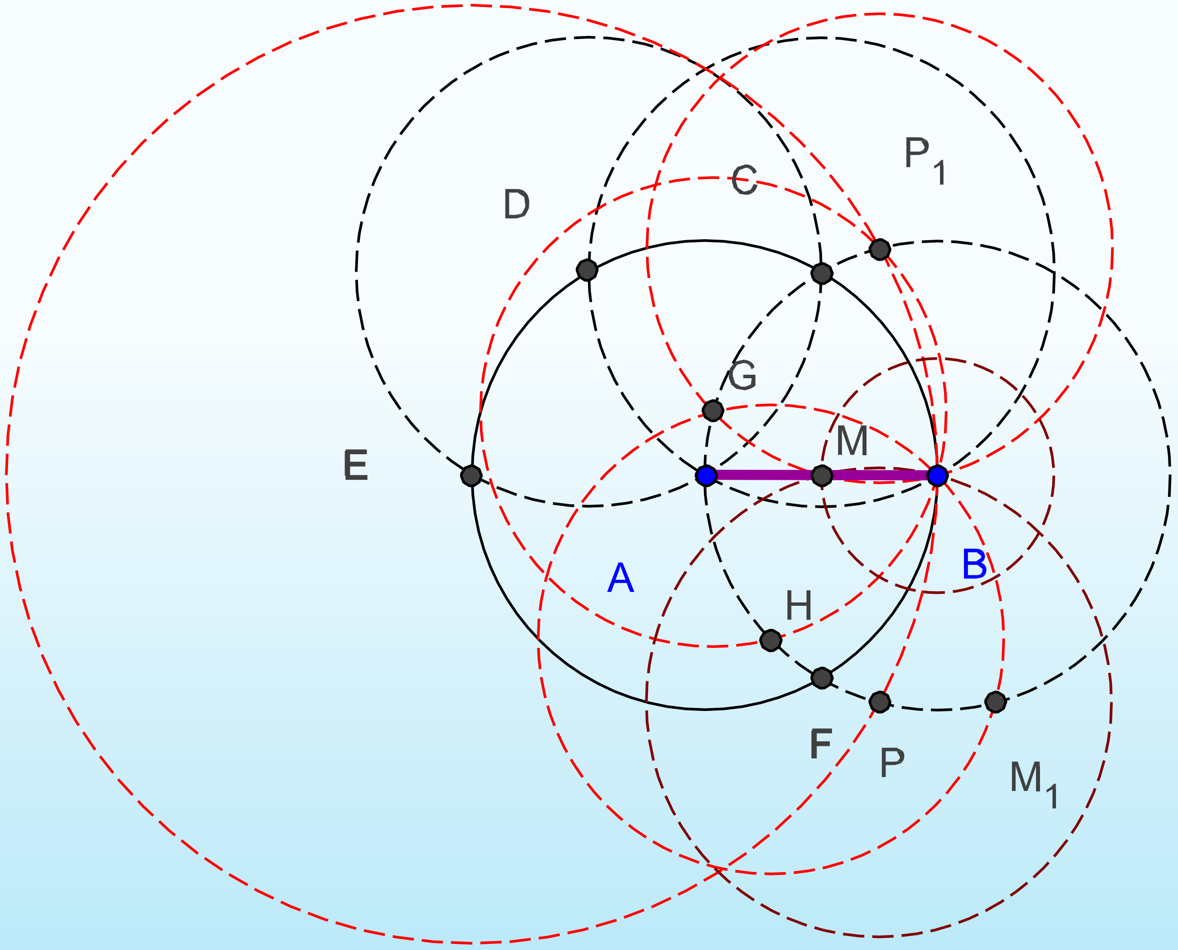
Duplicare il segmento *AB* con l'ausilio del solo compasso

Riferimento: Libro terzo, pag. 36 §64, [4]



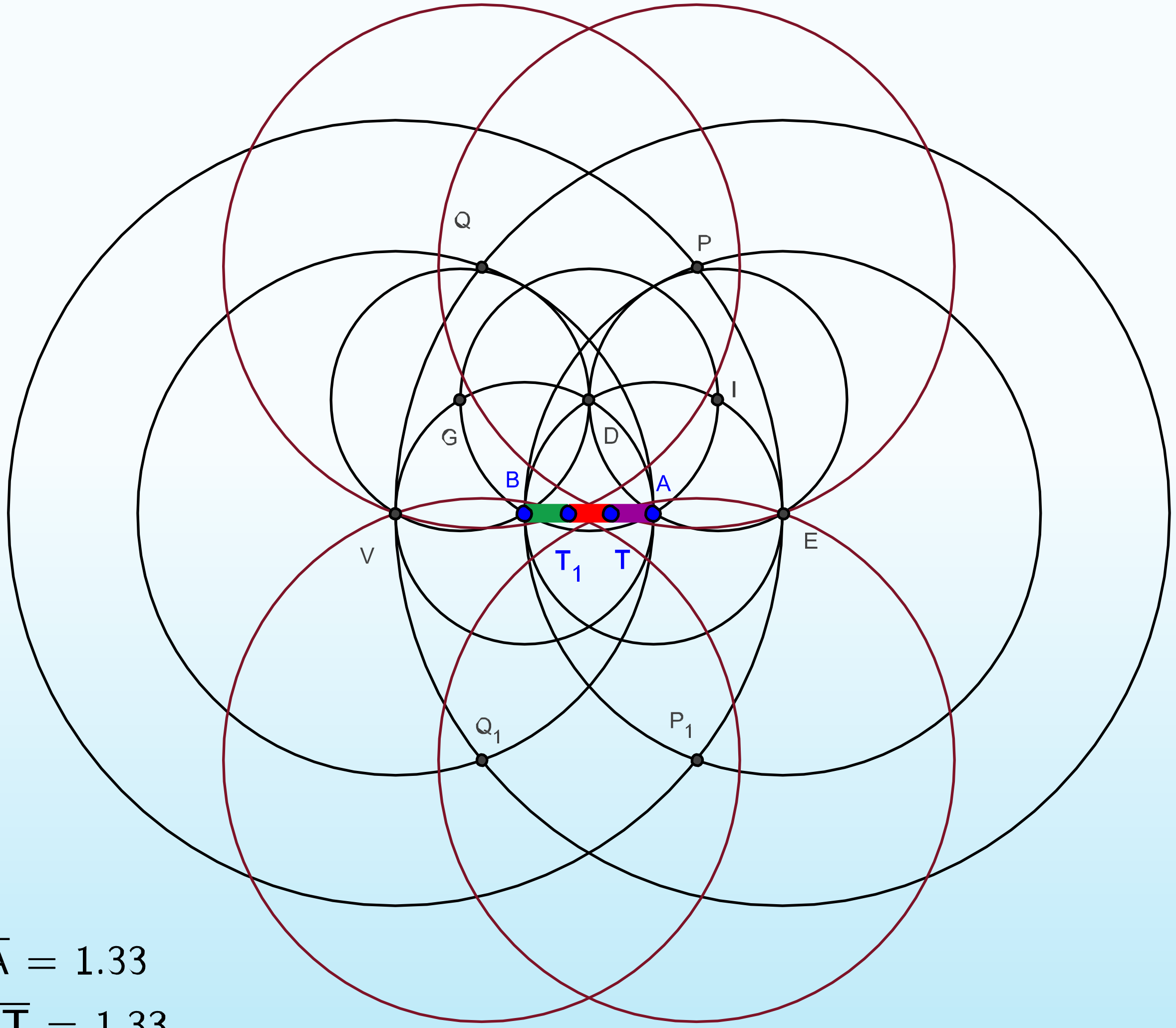
Dato un segmento *AB* dividerlo in due parti uguali con l'ausilio del solo compasso

Riferimento: Libro terzo, pag. 37 §66, [4]



Dividere un segmento *AB*, con l'ausilio del solo compasso, in tre parti uguali.

Riferimento: Libro terzo, pag. 47 §68, [4]

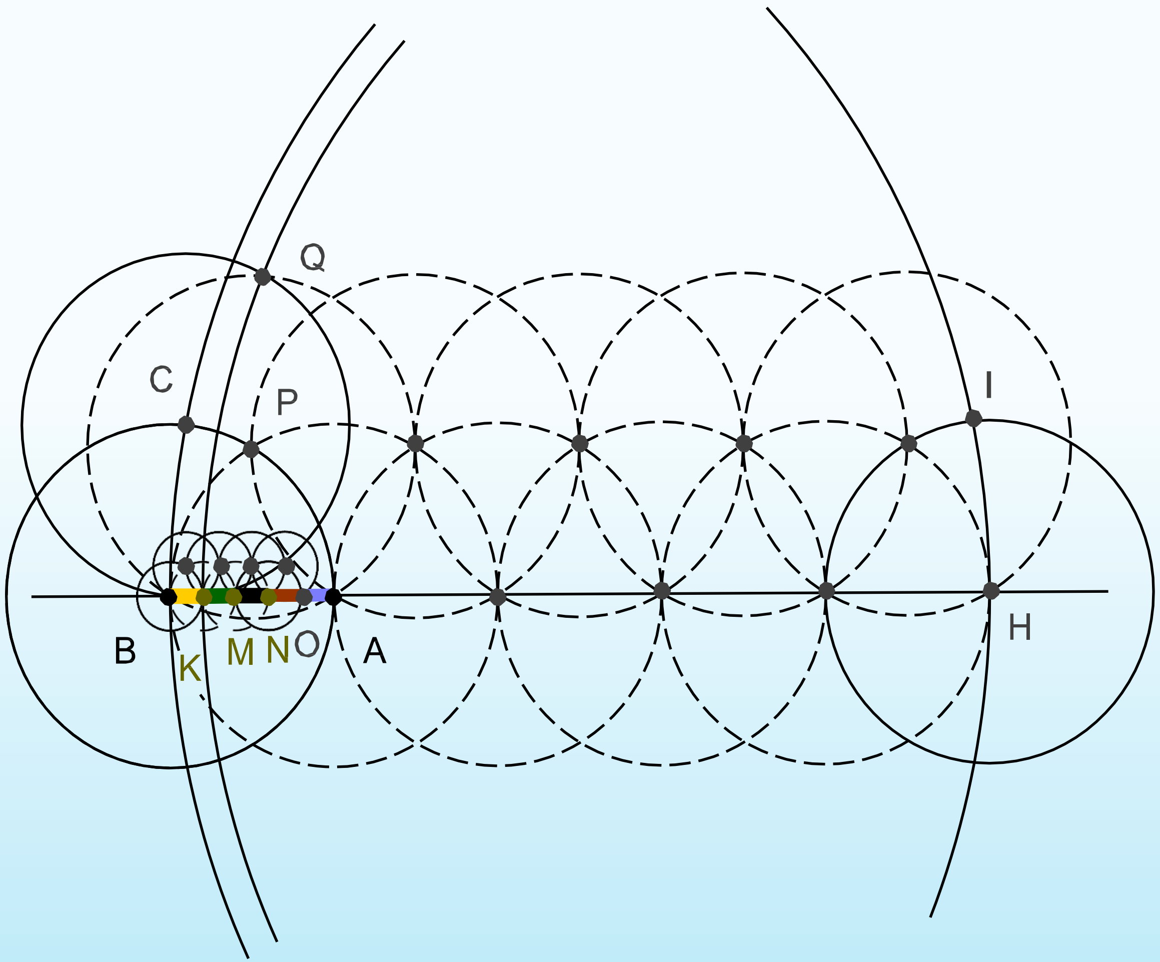


$\overline{TA} = 1.33$

$\overline{T_1T} = 1.33$

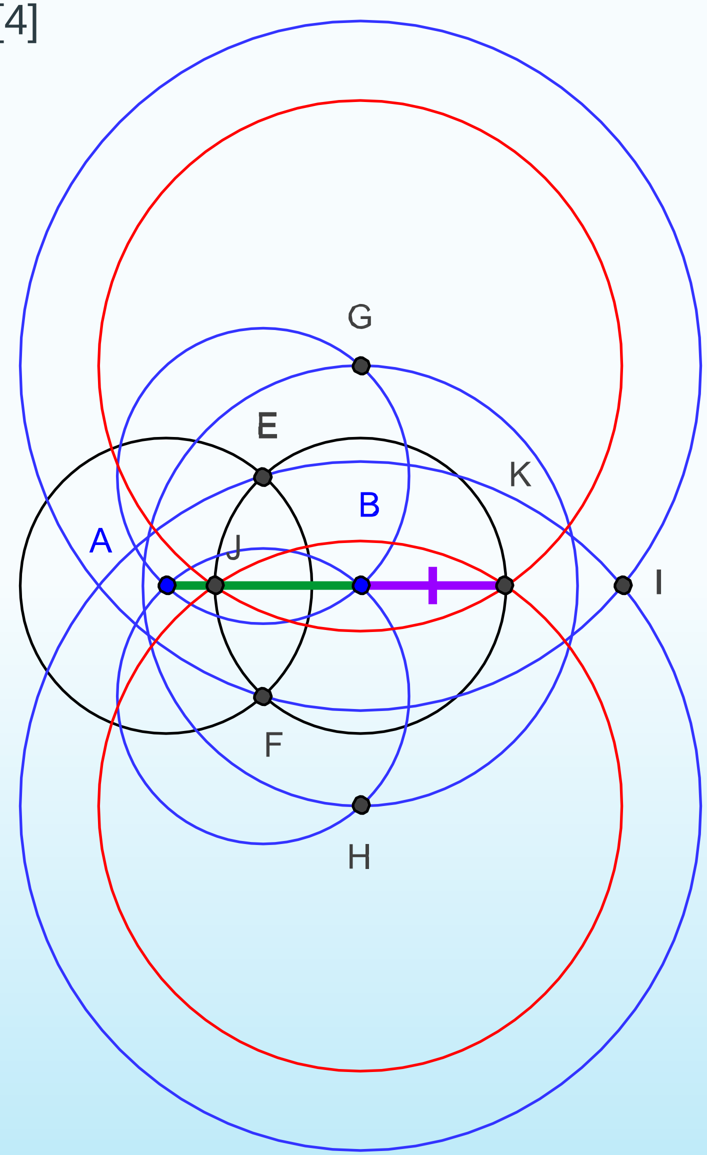
Dividere un segmento *AB*, con l'ausilio del solo compasso, in *n* parti uguali

Riferimento: Libro terzo, pag. 48 §69, [4]



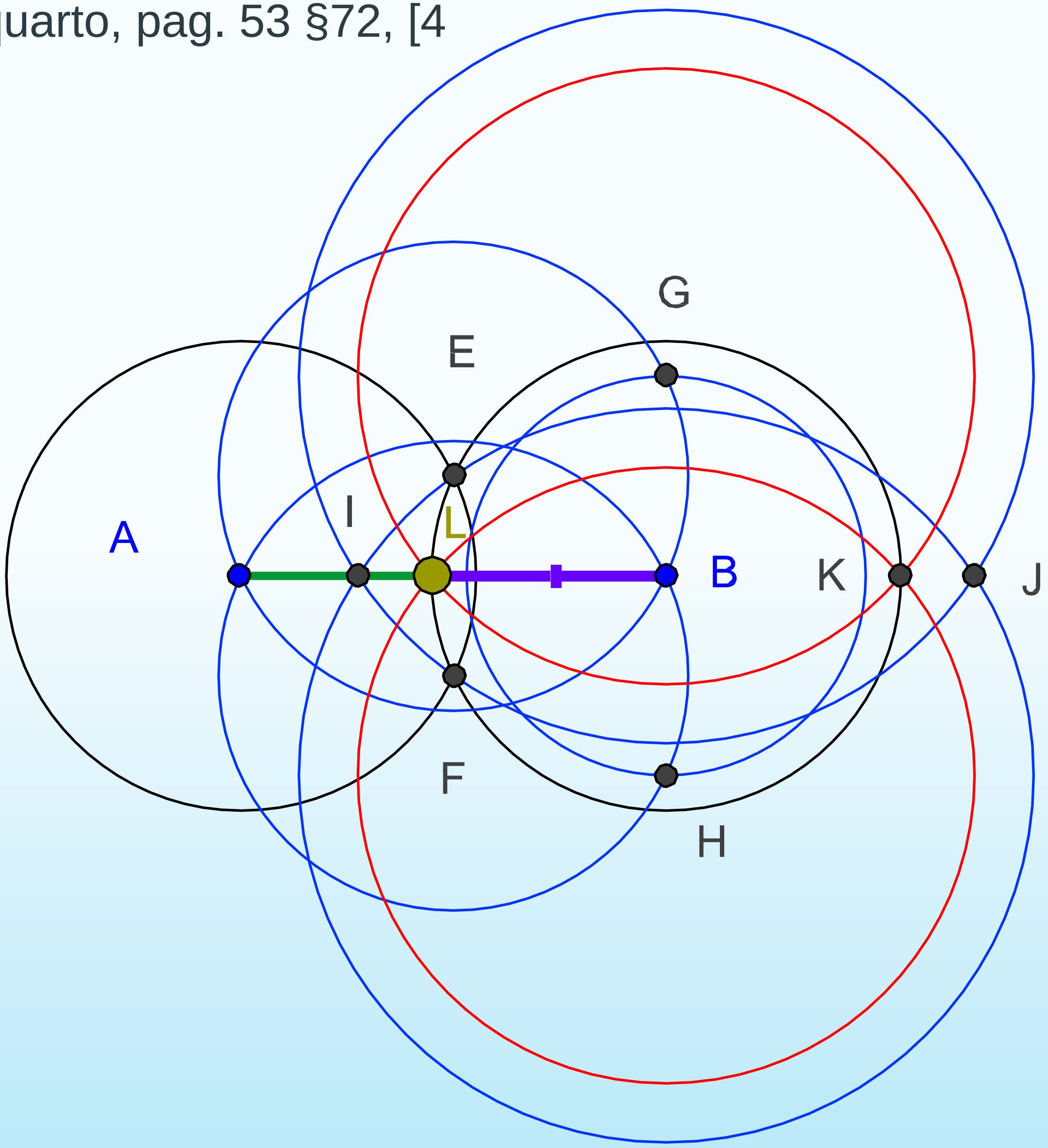
Ad un segmento *AB*, con l'ausilio del solo compasso, aggiungere in linea retta un segmento *CD*

Riferimento: Libro terzo, pag. 54 §73, [4]



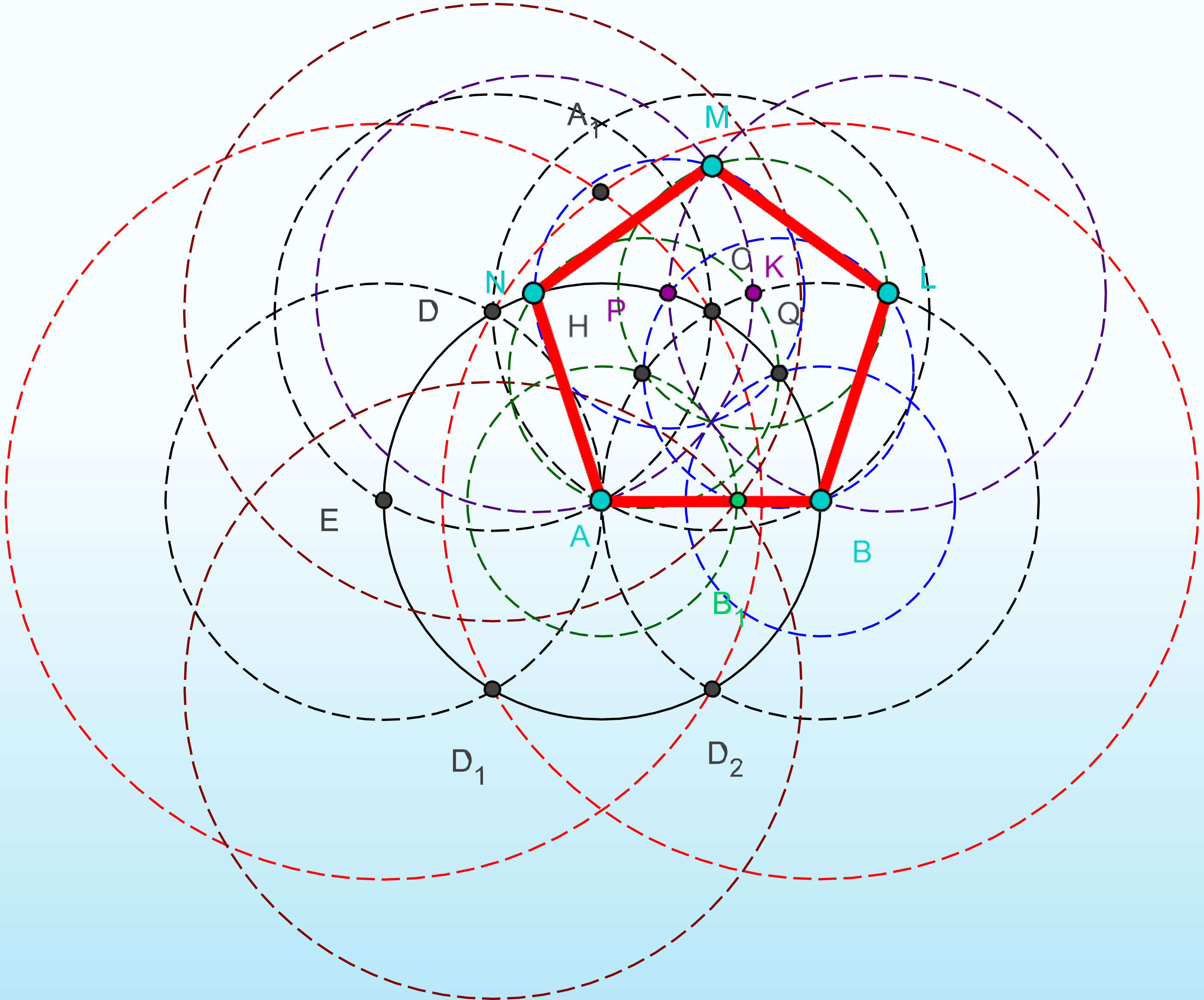
Ad un segmento *AB*, con l'ausilio del solo compasso, sottrarre in linea retta un segmento *CD*

Riferimento: Libro quarto, pag. 53 §72, [4



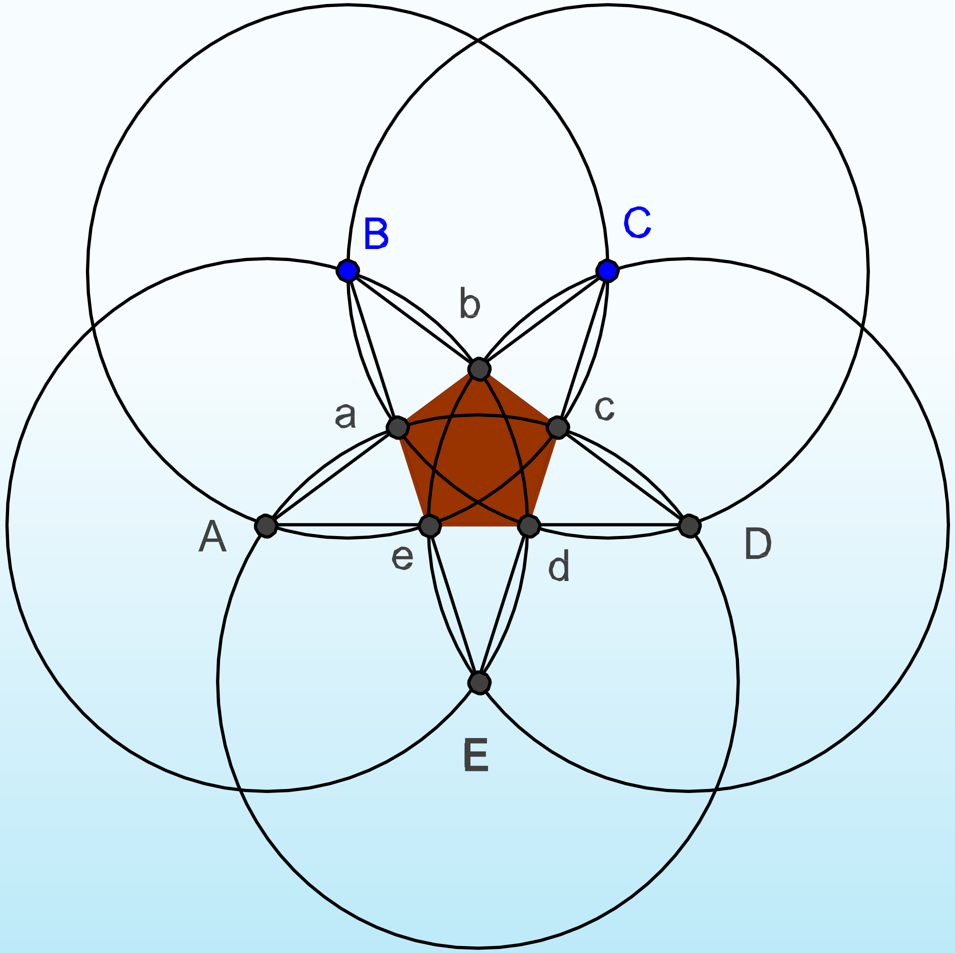
Costruire su un dato lato *AB*, con l'ausilio del solo compasso, un pentagono regolare

Costruzione pag.122 §137



Dati cinque punti *A*;*B*;*C*;*D*;*E* vertici di un pentagono regolare, trovare con l'ausilio del solo compasso, i punti *a*;*b*;*c*;*d*;*e*, nei quali essi taglierebbero le diagonali di questo pentagono.

Riferimento: Libro undicesimo, pag. 194 § 186 [4]



Inscrivere in un cerchio sei pentagoni, con l’ ausilio del solo compasso.

Riferimento: Libro undicesimo, pag. 195 § 187 [4]